Homework 2.

Exercise 1

Suppose that $f \in C[0,1]$, and that f is strictly monotonic increasing on $[0,1]$.
We wish to find the min-max polynomial p_0 of degree zero for f on $[0,1]$.i.e

$$\text{Find } p_0 \in \mathbb{P}_0 \text{ s.t} \quad \|f - p_0\|_\infty = \min_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_\infty$$

i) Show that :$\forall c \in \mathbb{R}, \quad \|f - c\|_\infty = \max(|f(0) - c|, |f(1) - c|)$

ii) Let, $E(c) = \max(|f(0) - c|, |f(1) - c|)$, show that :

$$E(c) = \begin{cases} f(1) - c & \text{if } c < \dfrac{(f(0) + f(1))}{2} \\ c - f(0) & \text{if } c \geq \dfrac{(f(0) + f(1))}{2} \end{cases} \tag{1}$$

iii) Draw the graph of the function :

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ c &\mapsto E(c) \end{aligned}$$

and show where its minimum is attained.

iv) Deduce the value of p_0.

v) Can you generalize the previous result to an arbitrary continuous function not necessarily strictly monotonic increasing ?

Exercise 2

i) Construct the best polynomial approximation $p_2 \in \mathbb{P}_2$ on the interval $[-1,1]$ for the function f defined by $f(x) = \sin x$ with respect of the sup-norm $\|\cdot\|_\infty$, i.e

$$\text{Find } p_2 \in \mathbb{P}_2 \text{ s.t} \quad \|f - p_2\|_\infty = \min_{q_2 \in \mathbb{P}_2} \|f - q_2\|_\infty$$

ii) Construct the best polynomial approximation $p_3 \in \mathbb{P}_3$ on the interval $[-1,1]$ for the function g defined by $g(x) = \cos x$ with respect of the sup-norm $\|\cdot\|_\infty$, i.e

$$\text{Find } p_3 \in \mathbb{P}_3 \text{ s.t} \quad \|g - p_3\|_\infty = \min_{q_3 \in \mathbb{P}_3} \|g - q_3\|_\infty$$

Exercise 3

The function H is defined by

$$H(x)=\begin{cases} 1 & \text{if } x>0 \\ 0 & \text{if } x=0 \\ -1 & \text{if } x<0. \end{cases} \tag{2}$$

i) Show that for any $n \geq 0$ and any $p_n \in \mathbb{P}_n$, $\|H-p_n\|_\infty \geq 1$ on the interval $[-1,1]$.
ii) Construct the polynomial, of degree 0 , of best approximation to H on the interval $[-1,1]$, and show that it is unique.
iii) Show that the polynomial of best approximation, of degree 1 , to H on $[-1,1]$ is not unique, and give an expression for its most general form

Exercise 4

Suppose that $x_1<x_2<\cdots<x_k$ are k distinct points in the interval $[a,b]$; for any function f defined on $[a,b]$, write

$$Z_k(f)=\max_{i=1}^{k}\left|f\left(x_i\right)\right|.$$

1. Explain why $Z_k(\cdot)$ is not a norm on the space $C[a,b]$; show that it is a norm on the space of polynomials of degree n, provided that $k>n$.

2. In the case $k=3$, with $x_1=0, x_2=\frac{1}{2}, x_3=1$, where we wish to approximate the function $f: x \mapsto \mathrm{e}^x$ on the interval $[0,1]$, show that the polynomial p_1 of degree 1 satisfies the conditions

$$f(0)-p_1(0)=-\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-p_1\right]\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)-p_1(1).$$

is the unique minimiser of $Z_3\left(f-q_1\right)$ over $\mathbb{P}_1$, i.e

$$Z_3(f-p_1)=\min_{q_1\in\mathbb{P}_1} Z_3\left(f-q_1\right)$$

3. Now suppose that $k=4$, with $x_1=0, x_2=\frac{1}{3}, x_3=\frac{2}{3}, x_4=1$; Use a similar method to construct the polynomial of degree 1 which minimises $Z_4\left(f-p_1\right)$.

Exercise 5

Suppose that $f \in C[a,b]$ and that f is convexe on $[a,b]$ such that $f'(x)$ exists at all $x \in (a,b)$. Describe a method for constructing $p_1 \in \mathbb{P}_1$ such that

$$\|f-p_1\|_\infty=\min_{q_1\in\mathbb{P}_1}\|f-q_1\|_\infty$$

Exercise 6

Construct the min-max polynomial approximation p_1 of degree 1 of the function $f(x) = \arctan(x)$ on the interval $[0, 1]$.

Exercise 7

Among all polynomials $p_n \in \mathbb{P}_n$ of the form

$$p_n(x) = Ax^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

where A is a fixed nonzero real number.

1. Find the polynomial of best approximation for the function $f(x) \equiv 0$ on the closed interval $[-1, 1]$.

Exercise 8

Find the best polynomial approximation $p_n \in \mathbb{P}_n$ on the interval $[-1, 1]$ for the function f defined by

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k,$$

where $a_{n+1} \neq 0$.

Exercise 9

Construct the best polynomial approximation $p_1 \in \mathbb{P}_1$ on the interval $[-1, 2]$ for the function f defined by $f(x) = |x|$.

Exercise 10

Give an example of a continuous real-valued function f defined on the closed interval $[a, b]$ such that the set of critical points for the best approximation of f by polynomials from $\mathbb{P}_1$ does not contain either of the points a and b.

Solutions.

1. a. ✍ ✍ ✍ ...

b.

c.

d. Soient x_1 et x_2 dans $[a, b]$ telles que

$$f(x_1) = \min f(x) < f(x_2) = \max f(x)$$

on pose $g(x) = f(x) - p_0$ alors

$$\begin{aligned} g(x_1)g(x_2) &= (f(x_1) - p_0)(f(x_2) - p_0) \\ &= f(x_1)f(x_2) - p_0\,(f(x_1) + f(x_2)) + p_0^2 \\ &= f(x_1)f(x_2) - 2p_0\frac{(f(x_1) + f(x_2))}{2} + p_0^2 \\ &= f(x_1)f(x_2) - p_0^2 < 0 \end{aligned}$$

car,

$$(f(x_1) + f(x_2))^2 > 4f(x_1)f(x_2) \iff (f(x_1) - f(x_2))^2 > 0$$

Donc d'après le théorème de Rolle, $\exists\xi \in]x_1, x_2[$ telle que $g(\xi) = 0$.
On a

$$g(x_1) = -g(x_2)$$

De plus si $g(x_2) > 0$ alors $g(x) \leq g(x_2)$ donc $\|g\|_\infty = |g(x_2)|$. D'après le théorème de Chebychev p_0 est la meilleure approximation.

2. i) la fonction $f(x) = \sin(x)$ est une fonction impaire, donc on cherche p_2 sous la forme

$$p(x) = c_1 x.$$

Donc d'après le théorème de Chebychev il existe 4 extrémums. La symétrie implique qu'on a deux points d'extrémum de la forme $\pm\xi$ avec $\xi \in]0, 1[$ ce point intérieure est caractérisé par $e'(\xi) = 0$ où $e'(x) = \cos(x) - c_1$ donc

$$\cos(\xi) = c_1.$$

Le fait que $e(x) = \sin(x) - c_1 x$ est strictement convexe sur $]0, 1]$ donc ± 1 sont des extrémums. Le théorème de Chebychev affirme que :

$$\begin{cases} \sin(\xi) - c_1\xi = M \\ \sin(1) - c_1 = -M \end{cases} \tag{3}$$

cela signifie que

$$\begin{cases} \sin(\xi) - \xi\cos(\xi) = M \\ \sin(1) - \cos(\xi) = -M \end{cases} \tag{4}$$

donc on cherche

$$\xi \in]0,1[, \quad \sin(\xi) - \xi\cos(\xi) - \sin(1) + \cos(\xi) = 0$$

On peut résoudre cette équation non linéaire en utilisant la fonction fzero [1] du MATLAB [2]. On trouve

$$\xi = 0.4937, \quad c_1 = -0.8806$$

Pour tracer le graphe de la fonction $e(x)$ on peut utiliser sous MATLAB :

» $x = -1 : 0.01 : 1$;

» $y = \sin(x) - 0.8806 * x$;

» plot(x,y)

1. fun $= @(x)\sin(x) - x * \cos(x) + \cos(x) - \sin(1)$
2. $x =$ fzero(fun, x_0)

ii) La fonction $f(x) = \cos(x)$ est paire donc on cherche p_3 sous la forme

$$p(x) = c_0 + c_2 x^2$$

Il existe trois extrémums intérieurs, $0, \pm\xi$ qui sont caractérisés par

$$-\sin(x) - 2c_2 x = 0$$

donc

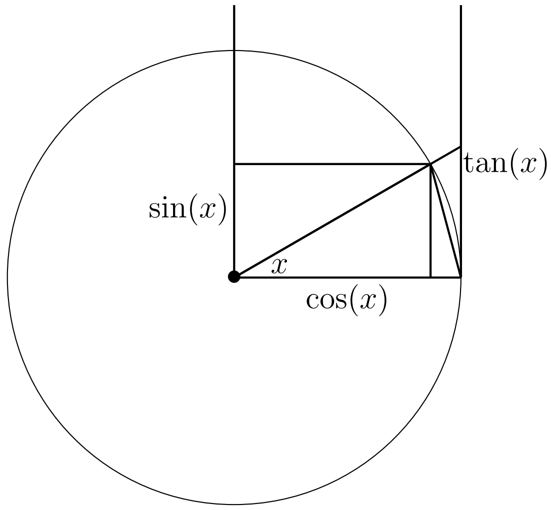
$$c_2 = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\xi)}{\xi}, \quad \xi \in]0, 1[$$

Mais le théorème de Chebychev affirme qu'il existe 5 extrémums. Nous montrons que ± 1 sont aussi des extrémums. Pour ceci il suffit démontrer que pour $x > \xi$ la fonction $e(x) = \cos(x) - c_0 - c_2 x^2$ est strictement croissante, ceci est équivalant à dire que $e'(x) > 0$ sur $]\xi, 1[$. En effet,

$$1 > x > \xi > 0, \quad e'(x) > 0 \iff -\sin(x) + x\frac{\sin(\xi)}{\xi} > 0 \iff \frac{\sin(\xi)}{\xi} > \frac{\sin(x)}{x}$$

La dernière inégalité est vraie car la fonction $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, 1]$. En effet,

$$g'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} < 0, \quad \text{car,} \ \ x < \tan(x), \quad \text{pour} \ \ 0 < x < 1$$



on peut aussi montrer que $e''(x) > 0$, pour $0 < \xi < x$. En effet,

$$e''(x) = -\cos(x) - 2c_2$$

Donc si $0 < \xi < x < 1$ alors $\frac{\sin(\xi)}{\xi} > \frac{\sin(x)}{x}$ donc

$$e''(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(\xi)}{\xi} > -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x}$$

et donc

$$e''(x) > 0 \iff \tan(x) > x$$

3. i) Soit $p_n \in \mathbb{P}_n$. Il est claire que

$$|H(x) - p_n(x)| = \begin{cases} |1 - p_n(x)| & \text{si } x > 0 \\ |p(0)| & \text{si } x = 0 \\ |1 + p_n(x)| & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Donc

$$\|H - p_n\|_\infty = \max(\max_{x>0} |1 - p_n(x)|, |p_n(0)|, \max_{x<0} |1 + p_n(x)|)$$

On pose $p_n(0) = \alpha$. On distingue deux cas : $\alpha = 0$ ou $\alpha \neq 0$.

a) Si $p_n(0) = 0$ alors

$$\|H - p_n\|_\infty = \max(\max_{x>0} |1 - p_n(x)|, \max_{x<0} |1 + p_n(x)|)$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0} |1 - p_n(x)| = 1 = \lim_{x\to 0} |1 + p_n(x)|$$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (suffisamment petit) tel que pour $|x| < \delta$ on a

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon \leq |1 - p_n(x)| \leq 1 + \varepsilon \\ 1 - \varepsilon \leq |1 + p_n(x)| \leq 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

Donc

$$1 - \varepsilon \leq \sup_{|x|\leq\delta} |H(x) - p_n(x)| \leq 1 + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

et puisque

$$\|H - p_n\|_\infty \geq \sup_{|x|\leq\delta} |H(x) - p_n(x)| \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Donc,

$$\|H - p_n\|_\infty \geq 1$$

b) Si $p_n(0) \neq 0$, on pose $p_n(0) = \alpha$, on a

$$\|H - p_n\|_\infty = \max \begin{cases} \sup_{x<0} |p_n(x) - 1| \\ |\alpha| \\ \sup_{0>x} |p_n(x) + 1| \end{cases} \tag{6}$$

alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $|x| < \delta$

$$\begin{aligned} \|H - p_n\|_\infty &\geq \sup_{|x|\leq\delta} |H(x) - p_n(x)| \\ &\geq \max(|1 - \alpha| - \varepsilon, |\alpha| - \varepsilon, |1 + \alpha| - \varepsilon) \\ &= \max(|1 - \alpha| - \varepsilon, |1 + \alpha| - \varepsilon) \end{aligned}$$

Donc,

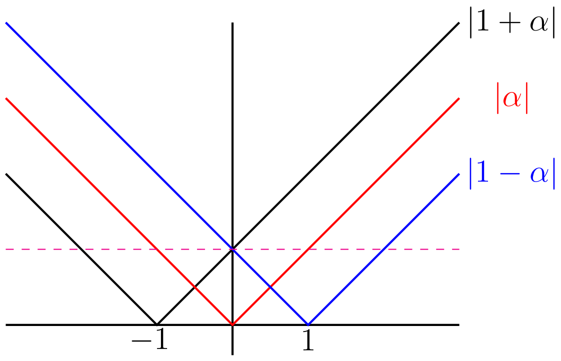
$$\forall p_n \in \mathbb{P}_n \|H - p_n\|_\infty > 1 \quad \text{(strictement)}$$

Mais, il est claire que

$$\inf_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|H - q_n\|_\infty \leq \|H\|_\infty = 1$$

alors

$$\inf_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|H - q_n\|_\infty = 1 \tag{7}$$



ii) De la question précédente il est claire que

$$\|H - p_n\|_\infty = \inf_{q_n \in \mathbb{P}_n} \|H - q_n\|_\infty \implies p_n(0) = 0$$

donc forcément,

$$\|H - p_0\|_\infty = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|H - c\|_\infty \implies p_0 = 0$$

iii) On doit chercher $p_1(x)$ de la forme

$$p_1(x) = cx, \quad \text{(puisque } p_1(0) = 0)$$

On pose $e(x) = H(x) - p_1(x)$

a) Supposons que $0 < c \leq 1$. On a

$$e(x) = \begin{cases} +1 - cx & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 - cx & x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

donc $e(x)$ est décroissante sur $]0, 1]$ et sur $[-1, 0[$ et

$$|e(0)| = 1, \quad |e(\pm 1)| = 1 - c$$

donc $|e(0)| \geq |e(\pm 1)|$ et $\|H - p_1\|_\infty = 1$

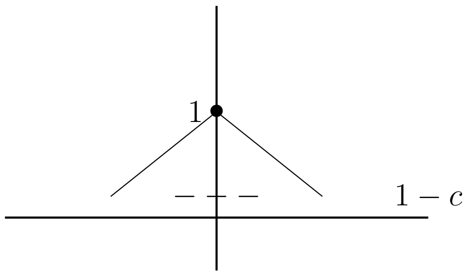


FIGURE 1 – Le graphe de $|e(x)|$ cas : $0 < c \leq 1$

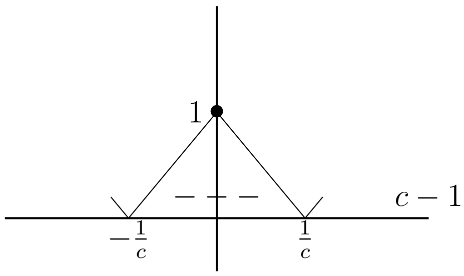


FIGURE 2 – Le graphe de $|e(x)|$ cas : $1 < c \leq 2$

b) Supposons que $1 < c \leq 2$ donc $e(x)$ est décroissante sur $]0,1]$ et sur $[-1,0[$ et $|e(0)| = 1, \quad |e(\pm 1)| = c-1$ donc $|e(0)| \geq |e(\pm 1)|$ et

$$\|H - p_1\|_\infty = 1.$$

c) Supposons que $c > 2$ alors $c-1 > 1$ et donc $|e(0)| < |e(\pm 1)|$ et

$$\|H - p_1\|_\infty = c - 1 > 1.$$

Dans ce cas cx n'est pas la meilleure approximation.

d) Supposons que $c < 0$ donc $e(x)$ est croissante sur $]0,1]$ et sur $[-1,0[$ et

$$|e(0)| = 1, \quad |e(1)| = |1-c|, \quad |e(-1)| = |-1+c| > 1$$

donc

$$\|H - p_1\|_\infty \geq |-1+c| > 1.$$

Dans ce cas cx n'est pas la meilleure approximation.
Conclusion :

$$\boxed{p_1(x) = cx \quad \text{avec} \quad 0 < c \leq 2.}$$

4. a) Il est claire que Z_3 n'est pas une norme sur $C[a,b]$ car on peut trouver une fonction f non nulle mais s'annule aux points x_i.

b) L'existence On cherche $p_1(x) = c_0 + c_1 x$ alors

$$\begin{aligned} e^0 - p_1(0) &= M \\ e^{0.5} - p_1(0.5) &= -M \\ e^1 - p_1(1) &= M \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{0.5} \\ e \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(\sqrt{e}-1) \\ e - 2\sqrt{e} + 1 \end{pmatrix}$$

cela implique que

$$M = \frac{e - 2\sqrt{e} + 1}{4} \approx 0.1052, \quad c_1 = e - 1 \approx 1.7183, \quad c_0 = \frac{3 - e + 2\sqrt{e}}{4} \approx 0.8948$$

implique que

$$p_1(x) = (e-1)x + \frac{3 + 2\sqrt{e} - e}{4} \approx 1.7183x + 0.8948$$

c) L'unicité S'il existe $q_1 \in \mathbb{P}_1$ tel que

$$Z_3(e^x - q) < Z_3(e^x - p_1)$$

On a

$$|e^{x_i} - q(x_i)| < M \iff -M < e^{x_i} - q(x_i) < M$$

et

$$p_1(x) - q_1(x) = p_1(x) - e^x + e^x - q_1(x)$$

cela implique que en x_1 :

$$\begin{aligned} p_1(0) - q(0) &= p_1(0) - e^0 + e^0 - q_1(0) \\ &= M + e^0 - q_1(0) \\ &> -M - M \\ &= 0 \end{aligned}$$

en x_2

$$\begin{aligned} p_1(0.5) - q_1(0.5) &= p_1(0.5) - e^{0.5} + e^{0.5} - q_1(0.5) \\ &= -M + e^{0.5} - q_1(0.5) \\ &< -M + M \\ &= 0 \end{aligned}$$

en x_3

$$
\begin{aligned}
p_(1) - q_1(1) &= p_1(1) - e^1 + e^1 - p(1) \\
&= M + e^1 - p(1) \\
&> M - M = 0
\end{aligned}
$$

Donc

$$(p_1 - q_1)(x_1) > 0, \quad (p_1 - q_1)(x_2) < 0, \quad (p_1 - q_1)(x_3) > 0$$

Cela signifie que $p_1 - q_1$ un polynôme de degré 1 qui change de signe trois fois (deux racines) donc $q_1 - p_1 = 0$

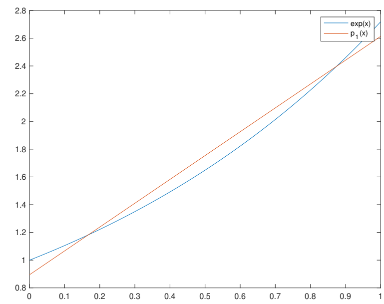


FIGURE 3 – Le graphe de $\exp(x), p_1(x)$

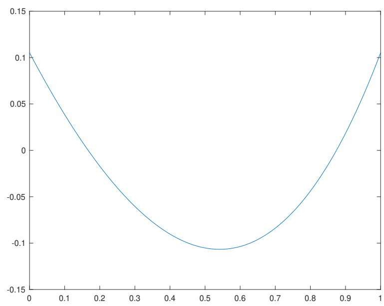


FIGURE 4 – The error $E(x) = \exp(x) - p_1(x)$

On note que

$$\|E\|_\infty = 0.1067 = |E(\ln(e-1))| \quad \neq \quad M = 0.1057 = |E(0.5)|$$

La meilleure approximation est

$$p^*(x) = (e-1)x + 0.8941$$

ce qui correspond à

$$\|E^*\|_\infty = 0.1059 < \|E\|_\infty$$

5. ✍ ✍ ✍ …

$$f(a) - (c_1 a + c_0) = \alpha M \tag{9}$$
$$f(d) - (c_1 d + c_0) = -\alpha M \tag{10}$$
$$f(b) - (c_1 b + c_0) = \alpha M \tag{11}$$

De (11) et (9) on déduit :

$$c_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pour calculer d on utilise

$$f'(d) - c_1 = 0$$

Ajouter (10) à (9) pour déterminer c_0. On trouve,

$$f(d) + f(a) - c_1(a + d) - 2c_0 = 0 \iff c_0 = \frac{f(a) + f(d) - f'(d)(a + d)}{2}$$

En suite αM peut être calculer de (9)

6. ✍ ✍ ✍ …

7. Soit $T_n(x)$ le polynôme de Chebyshev. Nous rappelons que :

a. $T_n(x)$ est de la forme :

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

b. Pour $p_{n-1}(x) = x^n - 2^{-n+1}T_n(x)$ on a

$$\|x^n - p_{n-1}\|_\infty = \inf_{q_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1}} \|x^n - q_{n-1}\|_\infty$$

le problème est équivalent à chercher $p_n \in \mathscr{A}_n$ tel que :

$$\|0 - p_n\|_\infty = \inf_{q_n\in\mathscr{A}_n} \|q_n\|_\infty$$

Mais,

$$\|p_n\|_\infty = \|Ax^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\|_\infty$$

donc minimiser $\|p_n\|_\infty$ est équivalent à minimiser

$$\|x^n - \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{a_k}{A}x^k\|_\infty$$

donc il faut que

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{a_k}{A}x^k = x^n - 2^{-n+1}T_n(x) \iff \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = \frac{A}{2^{n-1}}T_n(x) - Ax^n$$

Finalement,

$$\boxed{p_n(x) = \frac{A}{2^{n-1}}T_n(x)}$$

8. De la manière que l'exercice précédent on trouve :

$$\boxed{p_n(x) = f(x) - a_{n+1}2^{-n}T_{n+1}(x)}$$

9. La fonction $E(x) = |x| - c_0 - c_1 x$ est convexe sur $[-1, 2]$. En effet,

$$\begin{aligned} E(tx + (1-t)y) &= |tx + (1-t)y| - c_0 - c_1(tx + (1-t)y) \\ tE(x) + (1-t)E(y) &= t(|x| - c_0 - c_1 x) + (1-t)(|y| - c_0 - c_1 y) \\ &= t|x| + (1-t)|y| - c_0 - tc_1 x - (1-t)c_1 y \\ &= t|x| + (1-t)|y| - c_0 - c_1(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$

donc

$$(E(tx + (1-t)y)) - (tE(x) + (1-t)E(y)) = |tx + (1-t)y| - t|x| - (1-t)|y| \leq 0$$

Donc les points -1 et 2 sont des extrémums, cela implique que

$$E(-1) = E(2) \iff 1 - c_0 + c_1 = 2 - c_0 - 2c_1 \iff c_1 = 1/3$$

de plus on peut démontrer que

$$E(x) \geq E(0), \quad \forall x \in [-1, 2]$$

En effet,

$$|x| - \frac{1}{3}x \geq 0 \iff |x| - c_0 - \frac{1}{3}x \geq -c_0 \iff E(x) \geq E(0)$$

Cela signifie que le point $x = 0$ est le troisième extrémum donc

$$E(-1) = -E(0) \iff 1 - c_0 + 1/3 = c_0 \iff c_0 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{p_1(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x}$$

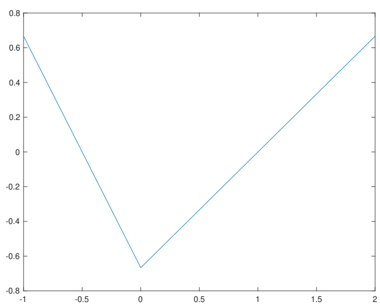


FIGURE 5 – The error $E(x) = |x| - p_1(x)$

10. $[a, b] = [-1, 1], \quad f(x) = \sin(3\pi(x+1)/2)$, $p_1(x) = 0$;