Analyse Asymptotique
Notes de cours et exercices

MERABET Ismail

Université KASDI MERBAH- Ouargla

Table des matières

Notations

➤ ε	Un petit paramètre positif .
➤ $\delta(x)$	La distribution de Dirac.
➤ O et o	Les zéros (notations) de Landau
➤ Ω	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.
➤ $\\|v\\|_{0,\Omega} = \\|v\\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega \lvert v\rvert^2 \ dx)^{1/2}$	La norme de L^2.
➤ $\lvert v\rvert_{1,\Omega} = \\|\nabla v\\|_{L^2(\Omega)} = \\|\nabla v\\|_{0,\Omega}$	La semi norme de H^1.
➤ $\nabla v = \mathrm{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$	Le gradient d'un vecteur v.
➤ $\mathrm{div}(u) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$	La divergence de u
➤ $\dfrac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n$	La dérivée suivant la normale.
➤ $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	Le Laplacien.
➤ $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \nabla v \in (L^2(\Omega))^2\}$	L'espace de Sobolev H^1.
➤ $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); D^\alpha v \in L^2(\Omega), \lvert\alpha\rvert \leq m\}$	L'espace de Sobolev H^m.
➤ $C^k(\Omega)$	Les fonctions k fois continument différentiabl
➤ $C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Les fonctions de C^∞ à support compact.
➤ $(\cdot,\cdot)$	Le produit scalaire.
➤ $\langle\cdot,\cdot\rangle$	Le produit de dualité.
➤ $\mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$	formes linéaires et continues sur $V \times W$.
➤ $\rightharpoonup$	La convergence faible.

Chapitre 1

Introduction aux Méthodes Asymptotiques

Introduction

La modèlisation mathématique des phénomènes physiques, biologiques, économiques,... conduit le plus souvent à des problèmes pour lesquels **il n'est pas possible de calculer une solution explicite**. Les solutions numériques sont même parfois difficiles à mettre en œuvre, particulièrement quand de petits paramètres sont présents ou quand les domaines de calcul sont très grands. Dans de telles situations, on peut tenter d 'élaborer des modèles plus simples, soit en annulant un paramètre, soit en se limitant à l'étude d'un domaine plus petit ; les deux simplifications pouvant être combinées (voir [?], [?]). Lorsque l'on annule un petit paramètre, noté de façon symbolique ε, on peut rencontrer deux situations, il se peut que la solution du problème initial **tend** ou / **ne tend pas** uniformément vers la solution du problème réduit quand $\varepsilon \to 0$. On est alors confronté à un problème dit de **perturbation régulière** ou / **perturbation singulière** pour ce dernier type de grandes difficultés mathématiques peuvent se poser qui sont essentiellement dus au fait que **certaines conditions aux limites sont perdues et des phénomènes de couche limite** apparaissent. La non-uniformité d'une approximation de la solution quand un paramètre est petit est un problème mathématique. L'identification de certaines grandeurs à des grandeurs physiques connues permet de prendre des informations capitales sur la nature du problème physique que l'on souhaite traiter et permettent ainsi une meilleure compréhension du modèle mathématique. Une autre situation qu'on la rencontre souvent consiste à chercher une solution qui doit satisfaire une **contrainte** que nous désignons de façon symbolique $\Psi(u)$. Un exemple de ce type de situation c'est l'exemple des fluides incompressibles en mécanique, la modélisation mathématique exige que l'écoulement u doit satisfaire la contrainte $\operatorname{div}(u) = 0$. Le cadre fonctionnel, c'est-t-à-dire, l'espace fonctionnel dans lequel se trouve la solution est formé des fonctions satisfaisant à cette contrainte. L'approximation d'un tel problème par des **méthodes conformes** présente souvent d'assez grandes difficultés. Pour surmonter ces difficultés, une des méthodes les plus utilisées ; c'est **la méthode de pénalisation**, qui consiste à résoudre un **problème analogue** à celui dont on cherche la solution mais dans un espace **plus grand** dont les éléments ne satisfont pas forcement la contrainte. Dans ce nouveau problème on ajoute un **terme pénalisation** de la forme :

$$\frac{1}{\varepsilon} b(u^\varepsilon, v) = \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \Psi(u^\varepsilon)\Psi(v)dx.$$

Quand ε est suffisamment petit, la solution u^ε du problème pénalisé est aussi proche que l'on veut de celle du problème original.

1.1 Développements asymptotiques

Dans tout ce cours ε désigne un petit paramètre strictement positif.

Définition 1.1.1. On appelle fonction de jauge (pour $\varepsilon \to 0$) les éléments d'une suite $\{\eta_i(\varepsilon)\}$ satisfaisant à

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta_{i+1}(\varepsilon)}{\eta_i(\varepsilon)} = 0. \tag{1.1}$$

Soit à présent f une fonction de ε définie sur $]0, \varepsilon_0[$. Si $\eta(\varepsilon)$ est une fonction de jauge, nous noterons :

$$f(\varepsilon) = \mathrm{o}(\eta) \iff \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\eta(\varepsilon)} = 0 \tag{1.2}$$

$$f(\varepsilon) = \mathrm{O}(\eta) \iff \left|\frac{f(\varepsilon)}{\eta(\varepsilon)}\right| < +\infty \tag{1.3}$$

$$f(\varepsilon) \sim \eta(\varepsilon) \iff \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to 0} \left|\frac{f(\varepsilon)}{\eta(\varepsilon)}\right| = K, \quad 0 < K < \infty \tag{1.4}$$

Remarque 1.1.1.

$$f(\varepsilon) = \mathrm{o}(\eta) \implies f(\varepsilon) = \mathrm{O}(\eta)$$

Exemples

1. $\tan(3\varepsilon) = \mathrm{O}(\varepsilon), \tan(3\varepsilon) = \mathrm{o}(1).$
2. $\sin(\varepsilon) - \varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon^3), \text{mais aussi } \mathrm{O}(\varepsilon^2), \text{ainsi que } \mathrm{o}(\varepsilon^2).$
3. $\exp(-\frac{1}{\varepsilon}) = \mathrm{o}(\varepsilon^m), \forall m \in \mathbb{R}.$
4. $\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \mathrm{O}(1).$
5. $\varepsilon^n \sim \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n \sim (\sin(\varepsilon))^n.$
6. $\varepsilon^n = \mathrm{o}\left(1/\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right), \quad n > 0.$

Définition 1.1.2. Nous dirons que :

$$f(\varepsilon) \cong \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(\varepsilon) \right) \tag{1.5}$$

est un développement asymptotique de $f(\varepsilon)$ dans un voisinage de zéro par rapport aux fonctions de jauge η_i si

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon) - \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} f_i(\varepsilon)}{\eta_N} = 0, \qquad N = 0, 1, ... \tag{1.6}$$

Le développement (1.5) peut, suivant les cas, avoir un nombre fini ou infinité dénombrable de termes. Dans ce dernier cas, la série du second membre peut être ou non convergente. La relation (1.5) équivaut à dire que :

$$f(\varepsilon) = f(0) + ... + f_N(\varepsilon) + o(\eta_N), \text{ pour tout N}$$

1.1.1 Exemples

1. Soit f une fonction différentiable à l'origine

$$f(\varepsilon) = f(0) + f'(0)\varepsilon$$

est un développement asymptotique de deuxième ordre au voisinage de zéro.

2. Si f admet un développement en puissance de ε de la forme :

$$f\ (\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} a_i \varepsilon^i \tag{1.7}$$

le second membre constitue un développement asymptotique de f par rapport aux fonctions de jauge ε^i.

3. Considérons la fonction définie par

$$f(\varepsilon) = 1 + \varepsilon + e^{-1/\varepsilon}$$

qui n'est pas analytique au voisinage de zéro. Alors avec les fonctions de jauge $\eta_i(\varepsilon) = \varepsilon^i$ on a

$$f_0 = 1, f_1 = \varepsilon, f_i = 0 \text{ pour } i > 1$$

et $f(\varepsilon)$ est asymptotiquement égale à $1 + \varepsilon$, en effet, (1.6) est satisfaite mais

$$f(\varepsilon) \neq 1 + \varepsilon.$$

Considérons à présent une fonction de x dépendant du paramètre ε. Soit D un domaine (par exemple de $\mathbb{R}^N$) et soit $f(x,\varepsilon)$ une fonction définie pour $x \in D$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, soit $\eta_i(\varepsilon)$ des fonctions de jauge (généralement indépendantes de x). Un développement asymptotique

$$f(x, \varepsilon) \simeq \sum_i f_i\,(x, \varepsilon)$$

avec

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\,(x, \varepsilon) - \sum\limits_0^N f_i\,(x, \varepsilon)}{\eta_{N(\varepsilon)}} = 0$$

peut n'être valable que pour x appartenant à un sous-domaine $D' \subset D$ alors qu'un autre développement asymptotique (avec des fonctions $g_i \neq f_i$) représente asymptotiquement f dans un autre sous-domaine $D'' \subset D$.

Remarque 1.1.2. Souvent, dans la pratique, la fonction $f_i\,(x, \varepsilon)$ est de la forme

$$f_i(x, \varepsilon) = \eta_i\,(\varepsilon)\,F_i\,(x) \tag{1.8}$$

le développement s'écrivant alors

$$f(x, \varepsilon) \equiv \sum_i \eta_i\,(\varepsilon)\,F_i\,(x)$$

La notation usuelle est alors $F_i = f^i$ si bien que le développement prend la forme

$$f(x, \varepsilon) = \sum_i \eta_i(\varepsilon) f^i(x)$$

Remarque 1.1.3. Une série asymptotique ou un développement asymptotique est tel que une somme partielle $\sum\limits_{i=0}^{N}, \quad N < \infty$ représente la fonction développée d'autant mieux qu'un certain paramètre est petit. Quand le paramètre est nul, ce cas limite donne exactement la fonction avec le premier terme de la série. Lorsque le paramètre n'est pas nul mais simplement petit, toute somme partielle est donc une approximation de la fonction. Il se peut arriver très souvent qu' un développement asymptotique soit divergent, mais il présente une bonne approximation (voir Exercice 1.1).

Les méthodes asymptotiques ont été utilisées pour résoudre plusieurs types de problèmes, des équations algébriques, des intégrales et des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Dans ce cours nous restreignons seulement au ce dernier cas.
De façon générale, les problèmes se présentent de la façon suivante : soit $\mathcal{A}_\varepsilon$, un opérateur différentiel tel que l'on cherche la solution $u_\varepsilon(x)$ des équations

$$\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x) \tag{1.9}$$

où x est une variable appartenant à un domaine Ω et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ étant un nombre positif fixé aussi petit que souhaité.

De ce fait ε est sans dimension, ce qui implique que le problème a été, au préalable, rendu sans dimension.

Si

$$\mathcal{A}_0 u_0(x) = f_0(x) \tag{1.10}$$

est, ce que l'on peut qualifier de problème réduit, supposé plus simple, il est impératif, en physique, que l'on puisse écrire que :

$$\| u_\varepsilon(x) - u_0(x) \|$$

est petit dans le domaine Ω considéré.

Définition 1.1.3. Si

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{Lim}} \; \| u_\varepsilon(x) - u_0(x) \| = 0 \tag{1.11}$$

le problème est dit régulier ; on a affaire à des problèmes de perturbation *régulière*. Si ce n'est pas le cas, au moins dans le domaine Ω tout entier. On parle alors d'un problème de *perturbation singulière*.

Remarque 1.1.4. Il arrive souvent qu'un problème soit de perturbation régulière par rapport à une norme et de perturbation singulière par rapport à une autre.

Dans la section suivante nous commençons par présenter deux problèmes aux limites dont la solution dépend d'un petit paramètre. Ces deux problèmes, à but pédagogique, peuvent être résolus explicitement. Ils permettent de comparer la solution exacte et celle obtenue par un développement asymptotique et de présenter les méthodes introduites dans ce cours.

1.2 Problèmes de perturbations régulières

1.2.1 Exemple d'un problème d'ordre un

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du^{\varepsilon}(x)}{dx} + \varepsilon u^{\varepsilon}(x) = f(x), \text{ si } x \in (0,1) \\ u^{\varepsilon}(0) = 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

La solution exacte du problème (1.12) est donc :

$$u^{\varepsilon}(x) = e^{-\varepsilon x}\left(1 + \int_0^x e^{\varepsilon t} f(t)\, dt\right). \tag{1.13}$$

Le problème réduit qu'on l'obtient en faisant $\varepsilon = 0$ dans (1.12) est le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du_0(x)}{dx} = f(x), \text{ si } x \in (0,1) \\ u_0(0) = 1. \end{cases} \tag{1.14}$$

Alors évidemment, la solution est :

$$u_0(x) = 1 + \int_0^x f(t)\, dt \tag{1.15}$$

Montrons maintenant que $u^{\varepsilon}(x)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers u_0, en effet,

$$|u^{\varepsilon}(x) - u_0(x)| = \left|u^{\varepsilon}(x) - 1 - \int_0^x \left(\frac{du^{\varepsilon}(t)}{dt} + \varepsilon u^{\varepsilon}(t)\right) dt\right| \tag{1.16}$$

$$= \varepsilon \left|\int_0^x u^{\varepsilon}(t)\, dt\right| \tag{1.17}$$

$$\leq \varepsilon \int_0^1 |u^{\varepsilon}(t)|\, dt \tag{1.18}$$

$$\leq \varepsilon(1 + e^{\varepsilon} \max_{x\in[0,1]} |f(x)|). \tag{1.19}$$

Alors,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in[0,1]} \|u^{\varepsilon}(x) - u_0(x)\| = 0. \tag{1.20}$$

Donc, d'après la définition 1.1.3 le problème (1.12) est un problème de perturbation régulière par rapport à la norme sup.

1.2.2 Exemple d'un problème d'ordre deux

Dans le cadre de la remarque 1.1.4, nous abordons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2u^\varepsilon(x)}{dx^2} + \dfrac{du^\varepsilon(x)}{dx} = 2x, \text{ si } x \in (0,1) \\ \qquad\qquad u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Alors la solution exacte est donnée par :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= x(x-2\varepsilon) + \frac{2\varepsilon - 1}{1 - e^{-1/\varepsilon}}(1 - e^{-x/\varepsilon}) \\ u^\varepsilon(x) &= (x^2 - 1) + e^{-x/\varepsilon} + r_\varepsilon(x), \\ r_\varepsilon(x) &= 1 - 2\varepsilon x - e^{-x/\varepsilon} + \frac{2\varepsilon - 1}{1 - e^{-1/\varepsilon}}(1 - e^{-x/\varepsilon}) \\ &= \alpha(\varepsilon)(1 - e^{-x/\varepsilon}) - 2\varepsilon x. \end{aligned}$$

On remarque que la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{du_0(x)}{dx} = 2x, \text{ si } x \in (0,1) \\ u_0(1) = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

est $u_0(x) = x^2 - 1$.

$$|u^\varepsilon - u^0| = |e^{-x/\varepsilon} + r_\varepsilon(x)|$$

On remarque que

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in [0,1]} \|u^\varepsilon(x) - u_0(x)\| \neq 0 \tag{1.23}$$

Alors que, pour tout $\delta > 0$

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in [\delta,1]} \|u^\varepsilon(x) - u_0(x)\| = 0 \tag{1.24}$$

et par conséquent,

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon \to 0} \|u^\varepsilon(x) - u_0(x)\|_{L^2(0,1)} = 0 \tag{1.25}$$

1.2.3 Exemple d'une équation aux dérivées partielles

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u^\varepsilon(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon(x,y)}{\partial y^2} = x \sin y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi \\ u^\varepsilon(0,y) = \sin(y) \\ u^\varepsilon(x,0) = u^\varepsilon(x,\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

La solution du (1.26) peut être calculer, en utilisant la méthode des séparation des variables. En effet, on cherche $u^\varepsilon(x,y)$ sous la forme

$$u^\varepsilon(x,y) = f(x)\sin(y).$$

Alors, on cherche $f(x)$ solution de :

$$\varepsilon \frac{df}{dx} + f = x$$

On suite, on pose $f(x) = g(x)h(x)$, et on cherche g et h solution de

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dh}{dx} + h = 0 \\ \varepsilon \dfrac{dg}{dx} h = x \end{cases} \tag{1.27}$$

Alors, on trouve que $f(x) = (ce^{-x/\varepsilon} + x - \varepsilon)$ et par conséquent, les conditions aux limites impliquent que la solution exacte du problème (1.26) est :

$$u^\varepsilon(x,y) = x\sin(y) + e^{-x/\varepsilon}\sin(y) + \varepsilon(e^{-x/\varepsilon} - 1)\sin(y)$$

qui converge uniformément, lorsque ε tend vers 0, vers la solution

$$u_0(x,y) = x\sin(y)$$

sur tout rectangle $\Omega_\delta = [\delta, 1] \times [0, \pi]$. On note que u_0 est la solution du problème réduit :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u_0(x,y)}{\partial y^2} = x\sin y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi \\ u_0(x,0) = u^\varepsilon(x,\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

Le problème est un problème de perturbation régulière par rapport à la norme L^2, puisque,

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } \varepsilon \to 0 \tag{1.29}$$

mais le problème est de perturbation singulière par rapport à la norme sup.

1.3 Problèmes de perturbations singulières

Dans de nombreux problèmes physiques, on rencontre, comme nous en verrons des exemples dans les chapitres qui suivent, des situations où les différents termes d'une équation sont affectés de coefficients numériques qui peuvent être d'ordres de grandeur différents. Apparaissent ainsi des petits paramètres ; en les négligeant on obtient des équations plus simples que l'on sait résoudre. Cependant, les solutions ainsi obtenues ne représentent pas la solution exacte dans tout le domaine considéré. **ll en résulte que certaines conditions aux limites sont perdues et des phénomènes de couche limite** apparaissent. On dit qu'il s'agit de phénomènes de **perturbation singulière**.

1.3.1 Méthodes des développements asymptotiques raccordés

Dans cette section nous présentons quelques modèles mathématiques traités à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés (c'est-à-dire faisant intervenir deux développements asymptotiques à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite).

1.3.2 Exemples modèles : couche limite

Exemple 1.3.1.

Soit $u(x,\varepsilon) = u^\varepsilon(x)$ une fonction définie pour $x \in (0,1)$ et $\varepsilon > 0$ satisfaisant à :

$$\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx} + a\,(x)\,u^\varepsilon\,(x) = b\,(x)\,, \tag{1.30}$$

$$u^\varepsilon\,(0) = 0 \tag{1.31}$$

où a et b sont des fonctions de $C^1[0,1]$ satisfaisant à

$$a(x) \geq c > 0 \text{ pour } x \in [0,1] \tag{1.32}$$

$$b\,(0) \neq 0 \tag{1.33}$$

On observe que, pour $\varepsilon > 0$, (1.30) est une équation différentielle du premier ordre qui définit la solution $u^\varepsilon(x)$ avec la condition initiale (1.31).
Pour $\varepsilon = 0$, l'équation (1.30) n'est plus différentielle et la condition initiale n'a plus de sens en tant que telle. La solution est alors :

$$u^0\,(x) = \frac{b(x)}{a(x)}. \tag{1.34}$$

Revenons à l'équation (1.30) avec $\varepsilon > 0$ petit, il est raisonnable de penser que $u^\varepsilon(x)$ sera de la forme :

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + o(1), \tag{1.35}$$

c'est-à-dire que pour x fixé et $\varepsilon \searrow 0, u^0(x)$ est la limite de $u^\varepsilon(x)$. Il est clair que cette limite n'a pas lieu pour $x = 0$, par conséquent il y aura un phénomène singulier au voisinage de $x = 0$. On dira que (1.35) est **le développement extérieur** de $u^\varepsilon(x)$ (au sens, valable à l'extérieur de la région de singularité).

Pour étudier la solution au voisinage zéro, nous effectuons une dilatation de la variable x en définssant une variable intérieure y

$$y = \frac{x}{\varepsilon} \implies \frac{d}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{dy} \tag{1.36}$$

Posons $v^\varepsilon(y) \equiv u^\varepsilon(\varepsilon y)$ alors (1.30) devient

$$\frac{dv^\varepsilon}{dy} + a(\varepsilon y)\, v^\varepsilon(y) = b(\varepsilon y)\,, y \in \left[0, \varepsilon^{-1}\right) \tag{1.37}$$

avec

$$v^\varepsilon(0) = 0. \tag{1.38}$$

En faisant $\varepsilon = 0$ dans (1.37) on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{dv^0}{dy} + a(0)\, v^0(y) = b(0)\,, y \in [0, +\infty) \\ \\ v^0(0) = 0 \end{cases} \tag{1.39}$$

dont la solution est

$$v^0(y) = \frac{b(0)}{a(0)}\left(1 - e^{-a(0)y}\right). \tag{1.40}$$

Revenant à l'équation (1.37), nous admettons que sa solution, compte tenu de (1.38), est de la forme

$$v^\varepsilon(y) = v^0(y) + o(1) \tag{1.41}$$

c'est-à-dire que, pour y fixé, $y < +\infty$ et $\varepsilon \searrow 0, v^0(y)$ est la limite de $v^\varepsilon(y)$, on dira que (1.41) est **le développement intérieur** de $u^\varepsilon(y)$ (au sens, valable à l'intérieur de la région de singularité).

La figure 1.1 donne l'allure des deux fonctions $u^0(x)$ et $v^0\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ pour ε petit, la solution exacte $u^\varepsilon(x)$ étant proche de l'une ou l'autre suivant que x est grand par rapport à ε ou de l'ordre de ε.

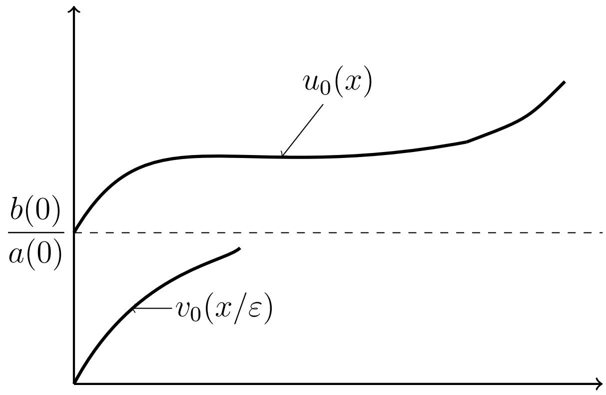


FIGURE 1.1 – $u_0(x)$ et $v_0(x/\varepsilon)$

1.3.3 Raccordement

Prenons des points intermédiaires définis par

$$x = \theta\varepsilon^{\alpha}, 0 < \alpha < 1, \theta \text{ fixé} \tag{1.42}$$

alors :
➤ Lorsque $\varepsilon \searrow 0$ les x correspondants tendent vers zéro et les y vers $+\infty$.
Si on fait l'hypothèse que les deux développements (1.35) et (1.41) suffisent à décrire la solution pour tout x, aux points $\theta = cte$ on pourra utiliser indifféremment l'un ou l'autre de ces développements.
➤ En particulier, les deux développements devront donner la même limite asymptotique.

Vérifions sur l'exemple qu'il en est bien ainsi, on doit avoir :

$$u^0\left(\theta\varepsilon^{\alpha}\right) + o(1) = v^0(\theta\varepsilon^{\alpha-1}) + o(1)$$

θ étant fixé, en faisant tendre ε vers zéro on obtient :

$$u^0\left(0\right) = v^0(+\infty). \tag{1.43}$$

Ce qui est bien vérifié, la valeur commune étant $b(0)/a(0)$.
Ce raccordement assure la cohérence mutuelle des deux développements à l'ordre retenu.

Il est possible de poursuivre la recherche des termes successifs des développements (1.35) et (1.41). Cherchons un développement extérieur de la forme :

$$u^{\varepsilon}\left(x\right) = u^0\left(x\right) + \varepsilon u^1(x) + o(\varepsilon). \tag{1.44}$$

Substituant (1.44) dans l'équation (1.30) nous obtenons :[1] :
➤ à l'ordre ε^0 (on déjà obtenu) :

$$a(x)u^0(x) = b(x)$$

1. en identifiant à zéro les puissances successives de ε

➤ à l'ordre ε :
$$\frac{du^0}{dx} + a(x)u^1(x) = 0$$
d'où
$$u^1(x) = -\frac{1}{a(x)}\frac{d}{dx}(\frac{b(x)}{a(x)}). \tag{1.45}$$
Nous cherchons de même un développement intérieur de la forme
$$u^\varepsilon(x) = v^0\,(y) + \varepsilon v^1\,(y) + o(\varepsilon) \tag{1.46}$$
que nous reportons dans (1.37) :
$$\begin{aligned}\frac{dv^0}{dy} + \varepsilon\frac{dv^1}{dy} + \ \mathrm{o}(\varepsilon) + [a(0) + \varepsilon y a'\,(0) + \ \mathrm{o}(\varepsilon)]\left[v^0\,(y) + \varepsilon v^1\,(y) + \ \mathrm{o}\,(\varepsilon)\right] \\ = b\,(0) + \varepsilon y b'\,(0) + \ \mathrm{o}(\varepsilon)\end{aligned}$$
qui, à l'ordre ε^0, redonne (1.39).

À l'ordre ε :
$$\frac{dv^1}{dy} + a(0)v^1 = -a'(0)yv^0(y) + b'(0)y \tag{1.47}$$
avec la condition
$$v^1\,(0) = 0.$$
L'équation (1.47) est de la forme :
$$\frac{dv^1}{dy} + \alpha v^1 = y(\beta e^{-\alpha y} + \gamma), \quad \alpha = a(0),\ \beta = -\frac{a'(0)b(0)}{a(0)},\ \gamma = b'(0)$$
supposons que $v^1 = f(y)g(y)$, alors
$$f(y) = e^{-\alpha y}, \quad g(y) = \frac{\beta y^2}{2} + \gamma(\frac{ye^{\alpha y}}{\alpha} - \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}) + C$$
d'où
$$\begin{aligned}v^1(y) &= \frac{\gamma}{\alpha^2}e^{-\alpha y} + \frac{\beta y^2}{2}e^{-\alpha y} + \frac{\gamma}{\alpha}(y - \frac{1}{\alpha}) \\ &= \frac{\gamma}{\alpha^2}(e^{-\alpha y} - 1) + \frac{\beta y^2 e^{-\alpha y}}{2} + \frac{\gamma y}{\alpha} \\ &= \frac{b'(0)}{a(0)^2}(e^{-\alpha y} - 1) - \frac{a'(0)b(0)}{2a(0)}y^2 e^{-\alpha y} + \frac{b'(0)}{a(0)}y\end{aligned}$$
Écrivant alors (1.44) et (1.46) en variable intermédiaire
$$\theta = \varepsilon^{-\alpha}x = \varepsilon^{1-\alpha}y, \quad 0 < \alpha < 1$$
on vérifie aisément que
$$\lim_{\varepsilon\to 0}(u^0(\theta\varepsilon^\alpha) + \varepsilon u^1(\theta\varepsilon^\alpha)) = \lim_{\varepsilon\to 0}(v^0(\theta\varepsilon^{\alpha-1}) + \varepsilon v^1(\theta\varepsilon^{\alpha-1})) = 0$$
donc ces deux développements coïncident aux deux premiers ordres, le raccordement est donc vérifié à l'ordre retenu.

Remarque 1.3.1. Dans la recherche de développements asymptotiques, ni la solution, ni la dilatation convenable ne sont connues d'avance. Les structures asymptotiques plausibles que l'on est amené à tenter peuvent conduire à des résultats incohérents.

Nous donnons un exemple de mise en œuvre asymptotique incohérente. Considérons à nouveau l'équation (1.30) satisfaisant aux conditions (1.32) mais avec la condition finale

$$u^\varepsilon(1) = 0 \tag{1.48}$$

au lieu de la condition initiale (1.31). Si on suivait le même processus que dans le cas précédent, on trouverait $u^0(x)$ donné par (1.34) qui, en général, ne prend pas la valeur 0 en 1. En définissant la variable dilatée

$$\tau = \frac{x-1}{\varepsilon} \tag{1.49}$$

on obtiendrait, à la place de (1.39),

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{dv^0}{d\tau} + a(1)v^0(\tau) = b(1)\tau \in \left]-\infty, 0\right] \\ v(0) = 0 \end{array} \right. \tag{1.50}$$

dont la solution est

$$v^0(\tau) = -\frac{b(1)}{a(1)}(e^{-a(1)\tau} - 1). \tag{1.51}$$

La condition de raccordement analogue à (1.43) serait

$$u^0(1) = v^0(-\infty) \tag{1.52}$$

qui n'est pas satisfaite par (1.34) et (1.51).

Expliquons ce phénomène. Prenons par exemple a et b constantes, égales à l'unité. Alors la solution exacte de (1.30) avec (1.48) est

$$u^\varepsilon(x) = 1 - e^{\dfrac{1-x}{\varepsilon}}$$

nous observons que pour tout $x < 1$ lorsque $\varepsilon \searrow 0, u^\varepsilon \to -\infty$, et que par suite le premier terme u^0 n'est nullement donné par (1.34).

Revenons à l'équation (1.30), du fait que a est strictement positif elle jouit de propriétés de stabilité exponentielle pour $x \to +\infty$ mais d'instabilité exponentielle pour $x \to -\infty$. Donc, en imposant des conditions initiales, on peut espérer que leur action devienne négligeable en dehors d'une région petite, c'est-à-dire en dehors d'une couche. Par contre, en imposant des conditions finales, leur influence ne peut que croître lorsque x décroît. Il était donc absurde et faux de prendre pour $u^0(x)$ la solution (1.34). En effet, cela revenait à négliger la condition en $x = 1$ dont l'influence est exponentiellement grande pour $x < 1$.

Remarque 1.3.2. L'exemple qui précède peut être considéré comme un modèle mathématique simple d'une situation physique assez générale.

Soit une équation du type

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\mathcal{A}u(x,t)=f, \tag{1.53}$$

où t désigne le temps et où $\mathcal{A}$ est un opérateur de différentiation par rapport aux variables d'espace. Considérons le problème stationnaire correspondant

$$\mathcal{A}u(x)=f \tag{1.54}$$

Si le phénomène est stable pour $t\to+\infty$ on aura

$$u(x,t)\underset{t\to\infty}{\to}u(x) \tag{1.55}$$

Si le coefficient ε dans (1.53) est petit, la variable significative est $\tau=x/\varepsilon$ de telle sorte que, dans (1.55), la convergence est très rapide et on a une couche limite au voisinage de $x=0$.
Les équations de la chaleur, de l'énergie et de Navier-Stokes non stationnaires entrent dans le cadre de ce qui précède. Il est connu que, du fait de la dégradation de l'énergie, il est possibled'imposer des conditions initiales mais non des conditions finales.
Exemple 1.3.2. Considérons à présent l'équation

$$-\varepsilon\frac{d^2u^\varepsilon(x)}{dx^2}+a(x)u^\varepsilon(x)=f(x),\varepsilon>0 \tag{1.56}$$

définie pour $x\in[0,1]$, où f est une fonction donnée vérifiant

$$f(0)\neq 0, f(1)\neq 0 \tag{1.57}$$

et où a(x) est une fonction de $C^0\left[0,1\right]$ satisfaisant, pour une certaine constante c, à

$$0<c<a(x)\ \text{ pour } x\in\left[0,1\right]. \tag{1.58}$$

Nous imposons les conditions aux limites

$$u^\varepsilon(0)=u^\varepsilon(1)=0. \tag{1.59}$$

Cherchons un développement extérieur, c'est-à-dire extérieur aux éventuelles couches limites, sous la forme

$$u^\varepsilon(x)=u^0(x)+o(1) \tag{1.60}$$

et reportons-le dans (1.56), nous obtenons immédiatement

$$u^0(x)=\frac{f(x)}{a(x)}, \tag{1.61}$$

qui ne satisfait pas aux conditions aux limites (1.59).
Étudions la couche limite au voisinage de zéro. Pour trouver un développement cohérent, effectuons une dilation définie par

$$y = \frac{x}{\delta(\varepsilon)} \tag{1.62}$$

où $\delta(\varepsilon)$ est, pour le moment, indéterminée mais satisfaisant à $\delta(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$.
Posons $v^\varepsilon(y) = u^\varepsilon(\delta(\varepsilon)y)$, nous obtenons

$$-\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \frac{d^2 v^\varepsilon}{dy^2} + a(\delta(\varepsilon)y)v^\varepsilon(y) = f(\delta(\varepsilon)y) \tag{1.63}$$

alors, lorsque $\varepsilon \searrow 0$:
-si $\varepsilon = o(\delta^2(\varepsilon))$ alors (1.63) donne

$$v^0(y) = \frac{f(0)}{a(0)}$$

qui ne convient pas puisque ne satisfaisant pas à la condition aux limites :
si $\delta^2(\varepsilon) =$ o (ε) alors (1.63) fournit

$$\frac{d^2 v^0}{dy^2} = 0 \to v^0(y) = \alpha y + \beta$$

α indéterminée, mais $\beta = 0$ puisque $v^0(0) = 0$. Cette solution ne convient pas non plus puisque $v^0(y) \to \infty$ et par suite $v^0(y)$ ne peut être raccordée à $u^0(x)$.
Prenons donc

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \tag{1.64}$$

alors (1.63) devient, lorsque $\varepsilon \searrow 0$,

$$-\frac{d^2 v^0}{dy^0} + a(0)v^0(y) = f(0) \tag{1.65}$$

dont la solution générale est

$$v^0(y) = Ae^{\sqrt{a(0)}y} + Be^{-\sqrt{a(0)}y} + \frac{f(0)}{a(0)} \tag{1.66}$$

où $A = 0$, sinon $v^0(y)$ ne peut être raccordée à $u^0(x)$; alors $v^0(0) = 0$ donne

$$v^0(y) = \frac{f(0)}{a(0)}(1 - e^{-\sqrt{a(0)}y}) \tag{1.67}$$

On vérifie immédiatement que la condition de raccordement

$$v^0(+\infty) = u^0(0)$$

obtenue comme en (1.43) de l'exemple 1.3.2 est bien satisfaite. Alors, en vertu du principe de raccordement, nous retiendrons comme développement intérieur de v^ε, au premier order,

$$v^\varepsilon(y) = v^0(y) + o(1). \tag{1.68}$$

De même pour satisfaire à la condition aux limites $u^\varepsilon(1) = 0$ on introduit la variable intérieure

$$z = \frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad z \in (-\infty, 0)$$

qui donne le premier terme $w^0(z)$ du développement intérieur

$$w^\varepsilon(z) = w^0(z) + o(1)$$

$$w^0(z) = \frac{f(1)}{a(1)}(1 - e^{\sqrt{a(1)z}})$$

L'allure générale du développement au premier ordre est donnée par la figure 1.2.

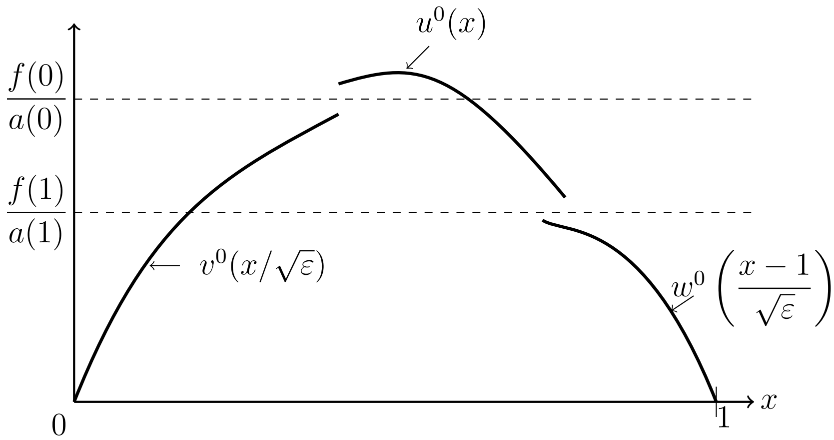


FIGURE 1.2 – $u^0(x), v^0(x/\sqrt{\varepsilon})$ et $w^0\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$

Remarque 1.3.3. En relation avec les commentaires sur la stabilité de la remarque 1.3.1, dans le cas présent nous constatons que l'on a pu choisir dans la solution générale (1.66) une solution $v^0(y)$ (resp. $w^0(z)$) stable pour y croissant (resp. pour z décroissant). Ceci explique que les deux développements soient cohérents.

Remarque 1.3.4. La discussion faite pour obtenir l'échelle de dilatation (1.64) nous a montré que l'équation (1.65) était, parmi tous les choix possibles, celui conduisant à retenir le plus de termes significatifs possible. Cette situation revêt un caractère très général et est souvent appelé Principe de moindre dégénérescence.

Remarque 1.3.5. Considérons une plaque élastique sous tension de petite rigidité à la flexion. Sous certaines hypothèses sa limite lorsque son épaisseur tend vers zéro est une membrane. L'étude de ce problème fait apparaître une perturbation singulière dont le problème de l'exemple 1.3.2 est un modèle mathématique simple.

1.3.4 Un exemple de singularité à l'infini

Dans cette section, nous donnons un exemple qui se rencontre fréquemment dans les applications. Le raccordement permet de déterminer non seulement la dilatation, comme dans l'exemple 1.3.2 mais aussi certains termes des développements, alors que dans les exemples de la section précédente les développements étaient déterminés et le raccordement était vérifié.

Considérons l'équation

$$-\frac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon a(x)u^\varepsilon = 0, \quad \varepsilon > 0 \tag{1.69}$$

où u^ε est définie pour $x \in [0, +\infty[$. La fonction $a(x)$ donnée est de classe C^1 et satisfait aux conditions

$$c_1 \le a(x) \le c_2 \tag{1.70}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes positives, et

$$a(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 1 \tag{1.71}$$

on impose les conditions aux limites

$$u^\varepsilon(0) = 1 \tag{1.72}$$

$$\lim_{x \to \infty} u^\varepsilon(x) = 0. \tag{1.73}$$

Remarque 1.3.6. L'équation (1.69) est différentielle du second ordre aussi bien pour $\varepsilon = 0$ que pour $\varepsilon \neq 0$. Cependant, pour $\varepsilon = 0$ le problème (1.69), (1.72), (1.73) est impossible. Par contre pour $\varepsilon > 0$ il se peut que la solution existe (par exemple pour $a(x) \equiv 1$ on a $u^\varepsilon = e^{-\sqrt{\varepsilon x}}$).
Cherchons un développement extérieur de la forme

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + o(1). \tag{1.74}$$

Reportant (1.74) dans (1.69) nous obtenons

$$\frac{d^2u^0}{dx^2} = 0 \Rightarrow u^0(x) = Ax + B.$$

Nous imposons la condition (1.72) d'où $B = 1$ et la condition (1.73) est alors impossible à satisfaire, A reste indéterminée.

Remarque 1.3.7. Si l'on avait imposé (1.73), on aurait eu $u^0(x) \equiv 0$ et (1.72) n'aurait pas été satisfaite. On aurait dû chercher une couche au voisinage de $x = 0$ et toute tentative de dilatation de la variable aurait échoué.

Pour étudier le voisinage de l'infini on effectue la contraction

$$y = \delta(\varepsilon)x \tag{1.75}$$

et en définissant v^ε par $v^\varepsilon(y) = u^\varepsilon([\delta(\varepsilon)^{-1}y)$ l'équation (1.69) devient

$$-\delta^2(\varepsilon)\frac{d^2v^\varepsilon}{dy^2} + \varepsilon a(\frac{y}{\delta\,(\varepsilon)})v^\varepsilon\,(y) = 0 \tag{1.76}$$

ce qui montre que l'on doit choisir

$$\delta\,(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \tag{1.77}$$

Cherchons un développement intérieur (à la région de singularité : voisinage de l'infini)de la forme

$$v^\varepsilon(y) = v^0(y) + o(1) \tag{1.78}$$

que nous reportons dans (1.76). Nous obtenons, en utilisant (1.71)

$$-\frac{d^2v^0}{dy^2} + v^0 = 0$$

d'où

$$v^0(y) = Ce^y + De^{-y} \tag{1.79}$$

alors, en imposant la condition à l'infini (1.73), nous devons prendre $C = 0$.
La détermination des constantes A et D se fait par raccordement en prenant pour variable intermédiaire

$$z = \varepsilon^a x, 0 < a < 1/2 \tag{1.80}$$

En admettant que les deux développements soient valables pour $z = 0(1)$ nous avons

$$u^0(\varepsilon^{-a} z) + o(1) = v^0 \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}-a} z\right) + o(1)$$

alors, en faisant tendre E vers zéro, nous obtenons

$$A = 0 \quad \text{et} \quad D = 1.$$

Ceci détermine complètement le premier ordre des développements extérieur et intérieur. Nous noterons qu'à l'ordre étudié la fonction $a(x)$ n'est intervenue que par sa limite à l'infini.

Remarque 1.3.8.
Dans cet exemple il convient de noter que le comportement singulier, pour $\varepsilon \searrow 0$ (non-satisfaction à la condition aux limites à l'infini) n'est pas lié (comme dans les exemples de la section 1.3) à l'abaissement de l'ordre de l'équation différentielle. Ce type de comportement à l'infini se rencontre dans l'étude de l'écoulement d'un fluide à petit nombre de Reynolds $Re < 1$ autour d'un corps lorsqu'on fait brutalement $Re = 0$.

Remarque 1.3.9.
Dans cet exemple, nous observons que le développement intérieur est valable dans un voisinage de l'infini (en fait il est intérieur à la région de singularité) alors que le développement extérieur est valable pour x fini.

1.4 Commentaires généraux

Les exemples des sections 1.3 et 1.3.4 ont permis de dégager la méthode d'étude des problèmes de perturbations singulières. Nous allons à présent en décrire les étapes principales.

1.4.1 Marche à suivre

1. Étude du problème dans la variable physique x (qui en général sera la variable extérieure) pour $\varepsilon \searrow 0$. On fait ainsi apparaître la première fonction de jauge $\eta_0(\varepsilon)$.
   On obtient également la fonction $u^0(x)$ qui ne satisfait pas à toutes les conditions aux limites.
2. Recherche d'une variable intérieure y pour l'étude du voisinage de chaque singularité. En général ceci implique que les équations satisfaites par $v^0(y)$ *et* $u^0(y)$ sont différentes.
3. Étude du premier terme du développement intérieur $v^0(y)$, cette étude est en général liée à l'étape précédente 2) et à la suivante 4). Elle conduit à la détermination partielle (par exemple à des constantes près) de $v^0(y)$.
4. Mise en œuvre du raccordement. Nous avons utilisé la méthode de la variable intermédiaire mais il en existe d'autres comme nous le verrons dans la suite de cette section. Cette étape est cruciale puisque si le raccordement n'aboutit pas, toutes les étapes de l'étude doivent être remises en question, voir remarque 3.3 et remarque 3.5.
5. Poursuite du processus pour le terme suivant. Nous devons trouver une deuxième fonction de jauge $\eta_1(\varepsilon)$. Souvent elle ne résulte pas naturellement du développement extérieur et nous devons la trouver par raccordement.

Remarque 1.4.1. Les exemples des sections 1.3 et 1.3.4 concernaient des équations différentielles ordinaires et les singularités apparaissent en des points. Dans les problémes physiques il se peut que les singularités aient lieu au voisinage de certaines courbes ou surfaces. La région de singularités 'appelle aussi couche limite. Souvent la dilatation s'effectue dans la direction normale.

1.4.2 Techniques de raccordement

Considérons un développement extérieur ($x = cte, \varepsilon \searrow 0$)et un développement intérieur ($y = cte, \varepsilon \searrow 0$)où $y = [\delta(\varepsilon)]^{-1}x$. Comme nous l'avons vu dans les exemples des sections 3 et 4, le raccordement consiste à exprimer que, si on définit une variable intermédiaire (par exemple $z = [\delta\,(\varepsilon)]^{-a}x, 0 < a < 1$), les deux développements sont simultanément valables pour $z = cte, \varepsilon \searrow 0$. Cette technique s' applique à tous les ordres (voir exemple 3.1). Si le raccordement a été effectué jusqu'à un certain ordre, on admet la validité des développements extérieur et intérieur jusqu 'à cet ordre, ce qui constitue le "Principe de raccordement".
Si les deux développements intérieur et extérieur commencent par des termes de l'ordre de l'unité, $u^0(x)$ et $v^0(y)$ respectivement, le raccordement au premier ordre , donne comme dans les exemples des sections 1.3 et 1.3.4,

Règle 1.4.1.

$$u^0\,(0) = v^0(\infty)$$

résultat qui peut être anoncé :

Règle 1.4.2. .
limite intérieure (de la limite extérieure) = limite extérieure (de la limite intérieure).

Où limite intérieure (resp. extérieure) signifie limite pour y fixé (resp. x fixé) et $\varepsilon \searrow 0$. En effet, $u^0(x)$ (resp.$v^0(y)$) est la limite extérieure (resp. intérieure) de u^ε. En faisant $x = \delta(\varepsilon)y$ dans $u^0(x)$ et $y = [\delta(\varepsilon)]^{-1}x$ dans $v^0(y)$ nous voyons que (1.4.2) exprime (1.4.1). Si les termes dominants des deux développements sont de l'ordre de $\eta(\varepsilon)$ au lieu d'être o(1), la règle (1.4.2) donne seulement $0 = 0$ ou $\infty = \infty$. Une règle plus générale le pour le raccordement des premiers termes est donc nécessaire :

Règle 1.4.3. .
Repré. intérieure (de l'extérieure) = Repré. extérieure (de l'intérieure)

où représentation intérieure (resp. extérieure) désigne le premier terme non nul du développement intérieur (resp. extérieur) en variables intérieures (resp. extérieures). Naturellement, pour exprimer (1.4.3), les deux termes doivent être décrits dans les mêmes variables (intérieures ou extérieures).

1.4.3 Interprétation du raccordement

Pour fixer les idées, considérons le cas où $u^\varepsilon(x)$ a pour développements extérieur et intérieur respectivement les deux développements

$$u^\varepsilon(x) \equiv u^0(x) + \varepsilon u^1(x) + ... \tag{1.81}$$

$$u^\varepsilon(x) \equiv u^0(y) + \varepsilon v^1(y) + ... \tag{1.82}$$

la variable intérieure étant définie par

$$y = \frac{x}{\varepsilon}. \tag{1.83}$$

La fonction $u^\varepsilon(x)$ peut être considérée comme une fonction de x et ε ayant une singularité à l'origine. Nous allons donner au processus de passage à la limite une forme plus symétrique en introduisant deux nouvelles variables ξ et η définies comme suit :
La limite extérieure (resp. intérieure) a lieu pour ξ fixé, $\eta \searrow 0$ (resp. pour η fixé, $\xi \searrow 0$), ce qui sera réalisé en posant

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x \\ \eta = \dfrac{\varepsilon}{x} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \xi \\ \varepsilon = \eta\xi \end{array}\right. \tag{1.84}$$

(on notera que $\eta = 1/y$).
Dans ces nouvelles variables (1.81) et (1.82) s' écrivent respectivement

$$u^\varepsilon(x) \equiv F(\xi,\eta) \equiv u^0(\xi) + \eta\left(\xi u^1(\xi)\right) + \mathrm{o}\left(\eta^2\right) \tag{1.85}$$

$$u^\varepsilon(x) \equiv F(\xi,\eta) \equiv v^0\left(\frac{1}{\eta}\right) + \xi\left(\eta v^1\left(\frac{1}{\eta}\right)\right) + \ \mathrm{o}\left(\xi^2\right) \tag{1.86}$$

Lorsque $\eta \searrow 0$ (resp. $\xi \searrow 0$) dans (1.85) (resp. (1.86)

$$\begin{array}{c} \text{limite extérieure de } u^\varepsilon(x) = u^0(\xi) \\ \text{limite intérieure de } u^\varepsilon(x) = v^0(\frac{1}{\eta}) \end{array} \tag{1.87}$$

alors la règle (1.4.1) ou (1.4.2) est équivalente à

Règle 1.4.4.

$$\lim_{\eta\to 0}\left(\underset{\xi\to 0}{F}(\xi,\eta)\right) = \lim_{\xi\to 0}\left(\lim_{\eta\to 0}F(\xi,\eta)\right)$$

qui peut être prise comme condition de raccordement à l'ordre un et qui exprime une sorte de régularité de $F(\xi,\eta)$ à l'origine. Les conditions de raccordement aux ordres suivants peuvent être obtenues de la même manière en supposant une régularité plus de forte de la fonction $F(\xi,\eta)$ à l'origine.

1.5 Méthode des échelles multiples

1.5.1 Introduction

Nous considérons à présent un nouveau type de problèmes. Il s'agit typiquement de problèmes de vibration où la présence du petit paramètre ε produit une petite perturbation pour un intervalle de temps de l'ordre de la période mais la perturbation a un effet cumulatif au cours du temps.
Les paramètres de vibration (par exemple l'amplitude) peuvent subir des variations importantes au bout d'un temps suffisamment long.

Citons à titre d'exemple les oscillations d'un pendule dans un milieu légèrement dissipatif ; chaque oscillation est approximativement égale à la suivante, mais au bout d'un grand nombre d'oscillations l'amplitude décrit et tend vers zéro lorsque $t \to \infty$. Ici la nature de la perturbation est essentiellement différente de celle des sections précédentes, **il n'y a pas de couche limite**.

Dans ce type de problèmes on cherche à obtenir développement asymptotique uniformément valable pour t de l'ordre o(ε^{-1}) i.e., pour $t \in [0, C\varepsilon^{-1}]$. Dans le langage courant, on dit parfois uniformément valable. Cette expression est inadéquate et en général fausse. Le développement est valable dans un intervalle de l'ordre de l'unité d'une variable de temps long $\tau = \varepsilon t$ et seulement dans des cas exceptionnels valable pour $t \in [0, +\infty[$.

Notons que le calcul numérique standard peut accumuler les erreurs et ne permet pas d'obtenir des résultats fiables pour tout $t \in [0, C\varepsilon^{-1}]$.

Par contre, la méthode des échelles multiples permet d'expliciter séparément les effets produits pendant des intervalles de temps de l'ordre de la période et l'évolution à long terme. Naturellement, comme nous le verrons les équations d'évolution obtenues en t et en τ peuvent être intégrées numériquement.

1.5.2 Exemple d'un problème avec frottement

Considérons, pour $t \geq 0$, la solution $u^\varepsilon(t)$ du problème [2] :

$$\frac{d^2u^\varepsilon}{dt^2} + u^\varepsilon = -2\varepsilon\frac{du^\varepsilon}{dt}, \quad t \geq 0 \tag{1.88}$$

$$u^\varepsilon(0) = 0, \tag{1.89}$$

$$\frac{du^\varepsilon}{dt}(0) = 1. \tag{1.90}$$

Si $\varepsilon = 0$ la solution est de la forme :

$$u(t) = A\ \cos(t) + B\ \sin(t) \tag{1.91}$$

Pour $\varepsilon \neq 0$ il faut s'attendre à une variation lente des coefficients A et B ; par conséquent :
➤ Nous introduisons un temps long $\tau = \varepsilon t$.
➤ Nous cherchons pour $u^\varepsilon(t)$ un développement de la forme

$$u^\varepsilon(t) \equiv u^0(t^*, \tau) + \varepsilon u^1(t^*, \tau) + \ \mathrm{O}(\varepsilon^2) \tag{1.92}$$

où

$$t^* = t \text{ et } \tau = \varepsilon t. \tag{1.93}$$

L'idée est d'introduire deux variables indépendantes, à caractère auxiliaire, et de chercher à exprimer la dépendance en t de u^ε par l'intermédiaire de (1.93).
II est clair que t^* (resp. τ est une variable (resp. lente) à caractère mathématique.
Nous avons alors

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t^*} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau} \tag{1.94}$$

De (1.92) et (1.94) nous tirons

$$\begin{cases} \dfrac{du^\varepsilon}{dt} = \dfrac{\partial u^0}{\partial t^*} + \varepsilon\left(\dfrac{\partial u^1}{\partial t^*} + \dfrac{\partial u^0}{\partial \tau}\right) + \varepsilon^2\left(\dfrac{\partial u^2}{\partial t^*} + \dfrac{\partial u^1}{\partial \tau}\right) + ... \\ \dfrac{d^2u^\varepsilon}{dt^2} = \dfrac{\partial^2 u^0}{\partial t^{*2}} + \varepsilon\left(2\dfrac{\partial u^0}{\partial \tau \partial t^*} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^{*2}}\right) + ... \end{cases} \tag{1.95}$$

Substituant (1.95) dans (1.88) et identifiant les puissances successives de ε nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^{*2}} + u^0 = 0 \tag{1.96}$$

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^{*2}} + u^1 = -2\left(\frac{\partial u^0}{\partial t^*} + \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^* \partial \tau}\right) \tag{1.97}$$

2. Il s'agit d'un oscillateur à un degré de liberté soumis à un frottement linéaire visqueux.

et ainsi de suite.
L'équation (1.96) donne

$$u^0(t^*, \tau) = A_0\,(\tau)\ \cos(t) + B_0\,(\tau)\ \sin(t^*) \tag{1.98}$$

et donc (1.97) devient

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^{*2}} + u^1 = -2(-\frac{dA_0}{d\tau}\sin t^* + \frac{dB_0}{d\tau}\cos t^*) - 2(-A_0\sin t^* + B_0\cos t^*) \tag{1.99}$$

dont la solution est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre

$$A_1\,(\tau)\ \cos(t^*) + B_1\,(\tau)\ \sin(t^*) \tag{1.100}$$

et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Remarque 1.5.1. Avant de poursuivre, notons qu'afin d'obtenir un développement valable pour $t^* = \mathrm{o}(\varepsilon^{-1})$ et $t = \mathrm{o}(1)$ chaque u^i dans (1.92) doit être o(1) (ou peut-être $\mathrm{o}(\varepsilon^{-1})$ dans les intervalles considérés, sinon le développement n'est plus cohérent.

Il est connu que la solution de l'équation (1.99) contient les termes $t^*\cos(t^*)$ et $t^*\sin(t^*)$ de telle sorte que, pour $t^* \in [0, \varepsilon^{-1}]$

$$u^1 \approx\ \mathrm{o}(\varepsilon^{-1}) \text{ et non } \mathrm{o}(1)$$

à moins que le second membre soit identiquement nul.
Nous prendrons donc

$$\begin{cases} \dfrac{dA_0}{d\tau} + A_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{dB_0}{d\tau} + B_0 = 0 \end{cases} \tag{1.101}$$

d'où

$$A_0\,(\tau) = \alpha e^{-\tau},\ \ B_0\,(\tau) = \beta e^{-\tau} \tag{1.102}$$

et par suite

$$u^0\,(t^*, \tau) = e^{-\tau}(\alpha\cos t^* + \beta\sin t^*) \tag{1.103}$$

où compte tenu de (1.89) et (1.90) ,

$$\alpha = 0,\ \ \beta = 1. \tag{1.104}$$

Le terme u^0 est donc complètement déterminé et $u^1(t^*, \tau)$ est donné par

$$u^1(t^*, \tau) = A_1\,(\tau)\cos t^* + B_1\,(\tau)\sin t^*$$

on peut alors poursuivre le processus.

Remarque 1.5.2. En déterminant les termes successifs du développement nous améliorons l'approximation pour $t \in [0, c\varepsilon^{-1}]$ mais, en général, ce faisant nous ne modifions pas le domaine de validité $t = o(\varepsilon^{-1})$.

Remarque 1.5.3.

On aurait pu chercher la solution générale (1.98) sous la forme

$$u^0(t^*, \tau) = c(\tau)\cos(t^* + \varphi(\tau))$$

on aurait eu alors

$$\frac{dc}{d\tau} + c(\tau) = 0 \Rightarrow c(\tau) = ce^{-\tau}$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \Rightarrow \varphi(\tau) = cte$$

est équivalente à (1.103).

Remarque 1.5.4. Le rôle des deux variables $t^* = t$ et $\tau = \varepsilon t$ a déjà été commenté au cours de l'exemple. Il est clair que dans la méthode des échelles multiples elles coexistent (c'est-à-dire, la solution dépend de t par l'intermédiaire de t^* et τ simultanément) alors que, dans le cas des développements asymptotiques raccordés les variables t et t/ε ont chacune leur domaine propre (même si ces deux développements ont une région de validité commune où s'effectue le raccordement).

Remarque 1.5.5. que l'étude de l'exemple précédent était basée sur la résolution explicite de l'équation (1.99). Dans des cas plus généraux cela n'est pas toujours possible. Par exemple, dans le cas où la résistance serait proportionnelle au carré de la vitesse, on aurait au second membre de (1.88) $-\varepsilon\left|\frac{du^\varepsilon}{dt}\right|\frac{du^\varepsilon}{dt}$ expression qui est non linéaire et non analytique. Il est alors utile d'avoir une mise en œuvre convenant à des problèmes assez généraux.

1.5.3 Exemple plus général

Considérons pour $t \geq 0$ la solution $u^{\varepsilon}(t)$

$$\frac{d^2u^{\varepsilon}}{dt^2} + u^{\varepsilon} = \varepsilon F\left(\frac{du^{\varepsilon}}{dt}\right) \tag{1.105}$$

$$u^{\varepsilon}(0) = 0, \tag{1.106}$$

$$\frac{du^{\varepsilon}}{dt}(0) = 1. \tag{1.107}$$

Nous cherchons, comme dans l'exemple (1.5.2), un développement de la forme :

$$u^{\varepsilon}(t) \equiv u^0(t^*, \tau) + \varepsilon u^1(t^*, \tau) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

Procédant comme dans cet exemple nous obtenons (1.96) dont la solution générale est encore

$$u^0(t^*, \tau) = A_0(\tau)\cos t^* + B_0(\tau)\sin t^* \tag{1.108}$$

L'équivalent de (1.97) est à présent

$$2\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^* \partial \tau} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^{*2}} + u^1 = F\left(\frac{\partial u^0}{\partial t^*}\right) \tag{1.109}$$

qui avec (1.108) devient

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^{*2}} + u^1 = -2(\frac{dB_0}{d\tau}\cos t^* - \frac{dA_0}{d\tau}\sin t^*) + F(-A_0\sin t^* + B_0\cos t^*) \tag{1.110}$$

qui est une équation différentielle pour trouver $u^1(t^*, \tau)$ où τ joue le rôle d'un paramètre. Une solution particulière de (1.110), notée $\widetilde{u}^1(t^*, \tau)$, s'obtient par la méthode de variation des constantes.

Posant

$$\widetilde{u}^1(t^*, \tau) = A_1(t^*, \tau)\cos t^* + B_1(t^*, \tau)\sin t^* \tag{1.111}$$

avec,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dA_1}{dt^*}\cos t^* + \dfrac{dB_1}{dt^*}\sin t^* = 0 \\[2ex] -\dfrac{dA_1}{dt^*}\sin t^* + \dfrac{dB_1}{dt^*}\cos t^* = 2\dfrac{dA_0}{d\tau}\sin t^* - 2\dfrac{dB_0}{d\tau}\cos t^* + F(-A_0\sin t^* + B_0\cos t^*) \end{array}\right. \tag{1.112}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dA_1}{dt^*} = \phi(A_0, B_0, \dfrac{dA_0}{d\tau}, \dfrac{dB_0}{d\tau}, t^*) \\[2ex] \dfrac{dB_1}{dt^*} = \Psi(A_0, B_0, \dfrac{dA_0}{d\tau}, \dfrac{dB_0}{d\tau}, t^*) \end{array}\right. \tag{1.113}$$

où

$$\begin{cases} \phi \equiv 2\dfrac{dA_0}{d\tau}\sin^2 t^* - 2\dfrac{dB_0}{d\tau}\cos t^* \sin(t^*) + F(-A_0\sin(t^*) + B_0\cos(t^*))\sin t^* \\ \\ \Psi \equiv 2\dfrac{dA_0}{d\tau}\sin t^* \cos t^* - 2\dfrac{dB_0}{d\tau}\cos^2 t^* + F(-A_0\sin t^* + B_0\cos t^*)\cos t^* \end{cases} \tag{1.114}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} A_1(t^*,\tau) = \int_0^{t^*} \phi(A_0, B_0, \dfrac{dA_0}{d\tau}, \dfrac{dB_0}{d\tau}, \xi)d\xi \\ \\ B_1(t^*,\tau) = \int_0^{t^*} \Psi(A_0, B_0, \dfrac{dA_0}{d\tau}, \dfrac{dB_0}{d\tau}, \xi)d\xi \end{cases} \tag{1.115}$$

qui reporté dans (1.111), donnerait $\widetilde{u}^1(t^*,\tau)$ si $A_0(\tau)$ et $B_0(\tau)$ sont déterminés.

En accord avec la remarque 1.5.2, $u^1(t^*,\tau)$ doit rester bornée pour $t^* \in [0, c\varepsilon^{-1}]$, ceci exige que la solution particulière $\widetilde{u}^1$ reste bornée pour ces valeurs de t^*, puisque la solution générale de l'équation sans second membre satisfait à cette condition.
En vertu de (1.111) cela impose que

$$A_1(t^*,\tau), B_1(t^*,\tau) \text{ restent bornées pour } t^* \in [0, c\varepsilon^{-1}] \tag{1.116}$$

Dans l'équation (1.115), nous remarquons que :

➤ les intégrands sont des fonctions périodiques de ξ de période 2π.

➤ l'intervalle $(0, t^*)$ doit contienir un nombre n fini de périodes (n d'autant plus grand que t^* est grand) plus un intervalle fini de longueur inférieure ou égale à 2π.

Alors, les intégrales de (1.115) sont égales à n fois les intégrales correspondantes sur une période plus, bien sûr les intégrales sur le dernier intervalle.

Ceci nous montre que A_1 et B_1 ne pourront être bornées qui si

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \Phi(A_0, B_0, \dfrac{dA_0}{d\tau}, \dfrac{dB_0}{d\tau}, t^*)dt^* = 0 \\ \\ \int_0^{2\pi} \Psi(A_0, B_0, \dfrac{dA_0}{d\tau}, \dfrac{dB_0}{d\tau}, t^*)dt^* = 0 \end{cases}$$

Explicitant ces conditions à l'aide de (1.114) nous obtenons :

$$\begin{cases} \dfrac{dA_0}{dt} = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(-A_0\sin t^* + B_0\cos t^*)\sin(t^*)\ dt^* \\ \\ \dfrac{dB_0}{dt} = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(-A_0\sin t^* + B_0\cos t^*)\cos(t^*)\ dt^* \end{cases} \tag{1.117}$$

avec les conditions :

$$A_0(0) = 0, \quad B_0(0) = 1. \tag{1.118}$$

1.6 EXERCICES

Exercice 1.1. Dans cet exercice on cherche à évaluer $\int_5^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ à l'aide d'une série asymptotique **divergente**. Soit la fonction f définie par :

$$f(\varepsilon) = \int_{1/\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

1. Montrer que

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= e^{-1/\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}(n-1)!\varepsilon^n + (-1)^N N! \int_{1/\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}}\, dt \\ &= e^{-1/\varepsilon}\sum_{n=1}^{N} f_n(\varepsilon) + R_N, \quad f_n(\varepsilon) = (-1)^{n-1}(n-1)!\varepsilon^n. \end{aligned}$$

2. Montrer que la série $\sum f_n(\varepsilon)$ est divergente.

3. Montrer que

$$|e^{1/\varepsilon} R_n| < n!\varepsilon^{n+1}$$

4. Montrer que

$$0.00112 < f(1/5) < 0.00117.$$

Exercice 1.2. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du^\varepsilon}{dx} + u^\varepsilon = \varepsilon x, & \text{si } 0 < x < 1 \\ \quad u^\varepsilon(0) = 1 \end{cases} \tag{1.119}$$

1. Calculer la solution exacte u^ε et la solution du problème réduit u^0.

2. Calculer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{x\in[0,1]} \|u^\varepsilon(x) - u^0(x)\|$.

3. Le problème (1.119), est-il de perturbation régulière ou singulière ?

Exercice 1.3. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{du^\varepsilon}{dx} + u^\varepsilon = x, & \text{si } 0 < x < 1 \\ \quad u^\varepsilon(0) = 1 \end{cases} \tag{1.120}$$

1. Calculer la solution exacte u^ε et la solution du problème réduit u^0.

2. Calculer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{x\in[0,1]} \|u^\varepsilon(x) - u^0(x)\|$.

3. Le problème (1.120), est-il de perturbation régulière ou singulière ?

Exercice 1.4. Soit $u^\varepsilon(x)$ une fonction défine pour $x \in (0, +\infty)$, satisfaisant à

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{du^\varepsilon}{dx} + u^\varepsilon = x + 1 \text{ pour } x \in (0, +\infty) \\ \quad \dfrac{du^\varepsilon}{dx}(0) = -\dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases} \tag{1.121}$$

où ε est un paramétre positif destiné à tendre vers zéro.

1. Déterminer le premier terme du dévelopement asymptotique.

2. A l'aide de la dilatation définie par $y = \dfrac{x}{\varepsilon}$, donner le premier terme développement intérieur $v^0(y)$.

3. Vérifier la condition de raccordement.

Exercice 1.5. On considére le probléme aux limites (tige élastique de petite rigidité) suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon^2 \dfrac{d^4u^\varepsilon}{dx^4} = -1 \quad \text{ pour } x \in (0, 1) \\ \qquad u^\varepsilon(0) = \dfrac{du^\varepsilon}{dx}(0) = 0 \\ \qquad u^\varepsilon(1) = \dfrac{du^\varepsilon}{dx}(1) = 0. \end{cases} \tag{1.122}$$

En utilisant la méthode des développements asymptoiques raccordés, trouver les premiers termes des développements extérieur et dans la couche limite au voisinage de $x = 0$ (l'étude au voisinage de $x = 1$ est tout à fait analogue).

Exercice 1.6. Soit l'équation différentielle :

$$-\varepsilon \frac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} + (2x + 1)\, u^\varepsilon = \sin(x), \text{ dans } (0, \frac{\pi}{2}), \tag{1.123}$$

et les conditions aux limites :

$$u^\varepsilon(0) = 0, u^\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{1.124}$$

1. Mettre en évidence l'existence d'une couche limite en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Déterminer la variable intérieure et chercher le premier terme d'un développement intérieur.

3. On cherche le développement extérieur sous la forme :

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \eta(\varepsilon)\, u^1(x) + \ \ldots \tag{1.125}$$

Déterminer $\eta(\varepsilon)$ et $u^1(x)$.

4. Montrer que, à l'ordre retenu, apparait une couche limite en $x = 0$.

5. Trouver le deuxiéme terme de développement intérieur, au voisinage de $x = \pi/2$.

6. Vérifier le raccordement en utilisant la variable intermédiaire :

$$\zeta = \varepsilon^{-1/4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{1.126}$$

7. Déterminer la variable intérieure dans la couche limite au voisinage de $x = 0$.

8. Trouver les deux premiers ordres du développement intérieur dans cette région et vérifier le raccordement avec le développement extérieur.

Exercice 1.7.

On considére l'équation

$$\frac{d^2u^\varepsilon}{dt^2} + u^\varepsilon = \varepsilon\left(2u^\varepsilon + e^{-t}\left(u^\varepsilon\right)^2\right) \quad \text{pour } t \in [0, +\infty[\,. \tag{1.127}$$

On utilisera la méthode des échelles multiples pour obtenir le premier terme d'un développement valable dans $t \in [0, l/\varepsilon]$. [3]

Exercice 1.8. Soit l'équation

$$\frac{d^2u^\varepsilon}{dt^2} + u^\varepsilon = \varepsilon\left(-u^\varepsilon + 2\frac{du^\varepsilon}{dt}\sin 2t\right) \tag{1.128}$$

➤ En utilisant la méthode des échelles multiples, trouver le premier terme d'un développement asymptotique valable dans $\left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right]$. [4]

Exercice 1.9. En utilisant la méthode de développement asymptotique raccordé trouver la solution extérieure et intérieure du problème suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon u'' = uu' - u \quad \text{si } 0 < x < 1 \\ u(0) = 1 \text{ et } u(1) = -1 \end{cases} \tag{1.129}$$

Exercice 1.10. En utilisant la méthode des échelles multiples résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + \varepsilon(u')^3 + u = \quad x \in (0,1) \\ u(0) = 0, \text{ et } u'(1) = 1 \end{cases} \tag{1.130}$$

Exercice 1.11. Soit l'équation

$$\varepsilon\frac{d^4u^\varepsilon}{dx^4} - \frac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} = f \quad \text{pour } x \in (-a, a), \tag{1.131}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(-a) = u^\varepsilon(a) = 0 \quad \text{pour } \varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon(-a) = u^\varepsilon(a) = 0 \quad \text{pour } \varepsilon > 0 \\ \dfrac{du^\varepsilon(-a)}{dx} = \dfrac{du^\varepsilon(a)}{dx} = 0 \quad \text{pour } \varepsilon > 0 \end{cases} \tag{1.132}$$

On suppose que la donnée $f \in L^2(-a, a)$.

---

3. Les valeurs initiales n'étant pas précisées, la solution contiendra deux constantes indéterminées

4. les valeurs initiales n'étant pas précisées, la solution contiendra deux constantes indéterminées.

1. Ecrire les formulations variationnelles des problémes déterminant u^ε et u^0.

2. Etudier la convergence de u^ε lorsque $\varepsilon \searrow 0$.

3. On suppose à présent que $f = \delta'$ (δ' dérivée de la distribution de Dirac).
a) Vérifier que $\delta' \in H^{-2}(-a, a)$,[5] mais que $\delta' \notin H^{-1}(-a, a)$.
b) Construire une solution de l'équation

$$-\frac{d^2 w}{dx^2} = \delta' \tag{1.133}$$

en déduire la solution du probléme

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2 u^0}{dx^2} = \delta' \quad \text{dans } (-a, a) \\ u^0(-a) = u^0(a) = 0 \end{cases} \tag{1.134}$$

4. Trouver, pour le probléme (1.134), une solution de couche limite au voisinage de $x = 0$.

5. On vérifiera qu'une dilatation $y = x/\varepsilon$ transforme

$$\delta(x) \text{ en } \varepsilon^{-1}\delta(y) \text{ et } \delta'(x) \text{ en } \varepsilon^{-2}\delta'(y).$$

Exercice 1.12.

Soit le problème aux valeurs propres suivant :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0 \text{ si } \varepsilon \leq x \leq \pi$$
$$\lambda > 0$$

avec les conditions aux limites :

$$f(\varepsilon) = 0 \qquad f(\pi) = 0.$$

1. Déterminer la solution exacte du problème, et l'ensemble des valeurs propres λ ; on effectuera un développement à l'ordre ε de λ.

2. Pour illustrer l'utilisation d'une méthode de perturbation, on pose :

$$f = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + ...; \qquad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + ...$$

Exprimer les conditions aux limites. Pour la condition en $x = \varepsilon$, on effectuera un développement limité de φ_0 et φ_1 au voisinage de $x = 0$; de cette façon la condition en $x = \varepsilon$ sera transférée en $x = 0$.

3. Déterminer $\varphi_0, \varphi_1, \lambda_0, \lambda_1$. Comparer à la solution exacte.

5. On rappelle que H^{-m} désigne le dual de H_0^m (voir le cours sur les Espaces de Sobolev)

Exercice 1.13. On se propose d'étudier une approximation asymptotique de $u_\varepsilon(x)$ telle que :

$$L_\varepsilon u_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon \frac{d^2 u_\varepsilon(x)}{dx^2} + 2(x-1)\frac{du_\varepsilon(x)}{dx} - 2(x-1)u^\varepsilon = 0,$$

où :

$$0 \leq x \leq 2,$$

avec :

$$u_\varepsilon(0) = 1, \quad u_\varepsilon(2) = 0.$$

1. Déterminer le domaine extérieur et l'approximation $u_0(x)$ correspondante.

2. Trouver l'épaisseur $\delta(\varepsilon)$ du domaine intérieur et déterminer la forme générale de l'approximation correspondante $v_0(y)$ où $y = \dfrac{x - x_0}{\delta}, x_0$ étant à préciser.

3. Comment s'applique le principe du raccordement. Tracer l'allure de la solution. On donne :

$$\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. Peut-on donner une approximation uniformément valable de $u_\varepsilon(x)$ sur le domaine $0 \leq x \leq 2$?

Exercice 1.14. On considère le problème suivant :

$$\varepsilon \frac{d^2 u_\varepsilon}{dx^2} + (1 + \alpha x)\frac{du_\varepsilon}{dx} + \alpha u^\varepsilon = 0,$$

avec :

$$u_\varepsilon(0) = 1, \quad u_\varepsilon(1) = 1.$$

1. Donner la solution générale $u_0(x)$ en dehors de toute couche limite.

2. On suppose $\alpha > -1$. En utilisant la dilatation

$$y = \frac{x}{\varepsilon}$$

déterminer $v_0(y)$ la solution de couche limite au voisisnage de 0 et u_{app} une approximation uniformément valable sur $[0, 1]$.
On suppose $a < -1$.

3. Trouver $u_0(x), v_0(y)$, $w_0(y^*)$ et u_{app} avec $y^* = \dfrac{1-x}{\varepsilon}$.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2 u_\varepsilon}{dx^2} + (1 - x)\dfrac{du_\varepsilon}{dx} - u_\varepsilon = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_\varepsilon(0) = 1, \quad u_\varepsilon(1) = 1. \end{cases} \tag{1.135}$$

1. Vérifier que la solution exacte a la forme :

$$u = e^{X^2}\left[A + B\int_0^X e^{-t^2}dt\right],$$

avec :

$$X = \frac{1-x}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

2. Déterminer A et B.

3. Montrer qu'il existe une couche limite en $x = 0$ et une autre en $x = 1$.

4. Donner la variable appropriée à chaque couche limite.
On sait que pour $z \to \infty$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z/\sqrt{2}} e^{-t^2}dt = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2/2}\left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + ...\right].$$

Exercice 1.15. (Perturbation singulière). Soit V un espace de Hilbert réel et $a : V\times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$ et b une forme bilinéaire et continue sur $V \times V$. On se donne $L : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur V.
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = L(v), \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{1.136}$$

avec

$$\varepsilon \in \mathbb{R} \text{ et } a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = a(u_\varepsilon, v) + \varepsilon b(u_\varepsilon, v).$$

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = \inf\limits_{v\in V\setminus\{0\}} \dfrac{a(v,v)}{\|v\|^2} \quad \text{et} \quad \|a\| = \sup\limits_{v\in V\setminus\{0\}} \ \sup\limits_{u\in V\setminus\{0\}} \dfrac{|a(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \\ \\ \|L\| = \sup\limits_{v\in V\setminus\{0\}} \dfrac{|L(v)|}{\|v\|} \quad \text{et} \quad \|b\| = \sup\limits_{v\in V\setminus\{0\}} \ \sup\limits_{u\in V\setminus\{0\}} \dfrac{|b(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \end{cases} \tag{1.137}$$

1. Soit $\varepsilon_0 = \dfrac{\alpha}{\|b\|}$ montrer que

$$\forall|\varepsilon| < \varepsilon_0 \text{ le problème (1.136) admet une solution unique.} \tag{1.138}$$

2. Montrer que pour tout $|\varepsilon| < \varepsilon_0$

$$\|u^\varepsilon - u^0\| \leq \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_0 - |\varepsilon|}\frac{\|f\|}{\alpha}. \tag{1.139}$$

3. Caractériser la limite de u^ε lorsque $\varepsilon \to 0$.

Exercice 1.16. (Problèmes sensitifs). Soit V un espace de Hilbert réel et $a : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue ([6]) sur $V \times V$ et b une forme bilinéaire et continue sur $V \times V$. On se donne $L : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue sur V. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ \quad a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = L(v), \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{1.140}$$

avec

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = a(u_\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u_\varepsilon, v), \quad 0 < \varepsilon << 1.$$

On suppose maintenant que le problème (1.140) s'écrit sous la forme :

$$Au^\varepsilon + \varepsilon^2 Bu^\varepsilon = F \text{ dans } V'. \tag{1.141}$$

avec $A \in \mathcal{L}(V, V')$ un opérateur injectif.

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &= a(u, v), \forall u, v \in V, \\ \langle Bu, v \rangle &= b(u, v), \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Soit l'espace V_A la complétion de V par rapport à la norme :

$$\|v\|_A = \|Av\|_{V'}.$$

1. Montrer que l'image de V par A, notée $\mathcal{R}(A)$ est dense dans V'.
   En admettant que l'opérateur A s'étend à un isomorphisme de V_A sur V'. Cette extension est unique et on la note aussi par A.
2. Montrer que si
   $$F \in V' \text{ alors } u^\varepsilon \to u^0 \text{ fortement dans } V_A$$
   où u^0 est la solution du problème :
   $$Au = F. \tag{1.142}$$

6. Attention ! a n'est pas coercive sur V

Exercice 1.17. (Méthode de correcteur). Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. On se donne des formes $a(u,v)$ et $b(u,v)$ bilinéaires, continues et symétriques sur V, et soit $F \in V'$
On suppose que $|\cdot|_j, j = 1,2$ deux semi-normes continues sur V telles que :

$$a(v,v) \geq \alpha |v|_1^2, \quad \alpha > 0, \quad \text{et} \quad b(v,v) \geq \beta |v|_2^2, \quad \beta > 0 \tag{1.143}$$

$$|\cdot|_1 + |\cdot|_2 \text{ est une norme équivalente à} \|\cdot\|_V. \tag{1.144}$$

On suppose de plus qu'il existe un sous-espace $V_0 \subset V,$ avec $V_0 \neq \{0\}$ tel que :

$$a(v,v) = 0, \quad \forall v \in V_0, \tag{1.145}$$

et que si $v \mapsto L_0(v)$ est une forme linéaire continue sur V nulle sur V_0 alors

$$\exists u \in V \text{ telle que } a(u,v) = L_0(v), \quad \forall v \in V. \tag{1.146}$$

Soit u^ε est l'unique solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ \quad a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon b(u^\varepsilon, v) = F(v), \forall v \in V \end{cases} \tag{1.147}$$

On postule un développement asymptotique de u^ε :

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} u_{-1} + u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \ldots\ldots \tag{1.148}$$

1. Montrer que l'identification formelle des puissance conduit aux formules suivantes :

$$\begin{cases} \quad u^{-1} \in V_0 \\ b(u^{-1}, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_0 \\ a(u^0, v) = (f, v) - b(u^{-1}, v), \forall v \in V, u^0 \in V \\ b(u^0, v) = 0, \qquad \forall v \in V_0 \\ a(u^j, v) = (f, v) - b(u^{j-1}, v), \forall v \in V, u^j \in V \\ b(u^j, v) = 0, \qquad \forall v \in V_0 \end{cases} \tag{1.149}$$

2. Montrer que les formules précédentes définissent u^i de manière unique.

3. Montrer que :

$$\|u_\varepsilon - \Big(\frac{u_{-1}}{\varepsilon} + u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon^j u_j\Big) \| \leq C\varepsilon^{j+1} \tag{1.150}$$

où C désigne une constante indépendant de ε.

Exercice 1.18. (Problème de couche mince)
On considére le probléme suivant

$$\begin{cases} \quad -\Delta u_2^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon \\ \\ \quad -\Delta u_1^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega_1 \\ \\ -\varepsilon \Delta u^\varepsilon = f \quad \text{dans } \omega^\varepsilon \end{cases} \tag{1.151}$$

avec les conditions aux limites et de transmission suivantes :

$$\begin{cases} u_1^\varepsilon = u^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_2^\varepsilon = u^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1} = \varepsilon \; a \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_1} = \varepsilon \; a \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} & \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \end{cases} \tag{1.152}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée, indépendante de ε et ω^ε désigne le domaine d'épaisseur εh compris entre Γ_1 *et* Γ_2^ε.

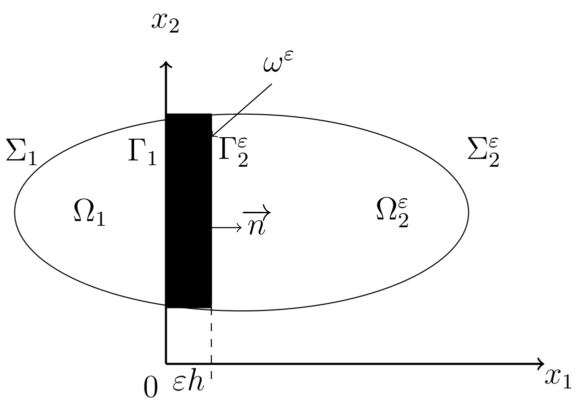


FIGURE 1.3 –

1. Introduire la variable dilatée $y_1 = x_1/\varepsilon$ dans la couche et écrire le développement correspondant ainsi que les développements extérieurs dans Ω_1 et Ω_2.
2. Ecrire l'équation et les conditions aux limites satisfaites par les termes dominants $v^0(y_1, x_2)$, $u_1^0(x_1, x_2)$, $u_2^0(x_1, x_2)$ de chacun de ces développements.
3. On notera que Γ_1 est fixe et Γ_2^ε converge vers Γ_1 lorsque $\varepsilon \searrow 0$. En accord avec la théorie,le développement asymptoique dans Ω_2^ε qui dépend de ε, seront définis pour $x_1 > 0$.

   a. Montrer que les fonctions u_1^0 et u_2^0 sont solutions d'un probléme bien posé dans le cadre du théoréme de lax-Milgram.

   b. On introduira l'espace V des fonctions discontinues

$$u^0(x_1, x_2) = \begin{cases} u_2^0 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_1^0 \text{ dans } \Omega_1 \end{cases} \tag{1.153}$$

   défini par

$$V = \{v = (v_1, v_2) | \quad v_1 \in H^1(\Omega_1), \quad v_2 \in H^1(\Omega_2), \quad v_k = 0 \text{ sur } \Sigma_k, k = 1, 2\}$$

4. Reprendre les questions 1 et 2 dans le cas du probléme suivant.

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \text{ satisfaisant à} \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f \end{cases} \tag{1.154}$$

où

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}^2 & \text{dans } \ \Omega_2 \\ a_{ij}^1 & \text{dans } \ \Omega_1 \\ \varepsilon b_{ij} & \text{dans } \varepsilon\omega. \end{cases} \tag{1.155}$$

les coefficients a_{ij}^k et b_{ij} étant constants, et aux conditions aux limites

$$[\![u^\varepsilon]\!] = 0 \text{ sur } x_1 = 0, x_1 = \varepsilon h$$

$$a_{ij}^1 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} = \varepsilon\ b_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \text{ sur } \Gamma_1$$

$$a_{ij}^2 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} = \varepsilon\ b_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\text{sur } \Gamma_2^\varepsilon$$

où $[u^\varepsilon]$ représente la différence des valeurs prises par u^ε de part et d'autre de la frontiére.

5. On considére à présent une variante du cas précédent qui consiste à supprimer la région Ω_2^ε en imposant sur Γ_2^ε la condition de Dirichlet $u^\varepsilon = 0$.

a. Etudier le probléme correspondant et motrer que le premier terme du développement asymptotique de u_1^0 satisfait sur Γ à une condition de type fourier de la chaleur .

Chapitre 2

Méthode de pénalisation

2.1 Principe de la méthode

La modélisation mathématique des phénomènes physiques conduit dans certains cas à des modèles avec des " contraintes " qui peuvent être très difficiles voire impossibles à programmer numériquement. La méthode de **pénalisation** a été très utilisée pour éviter cette difficulté à cause de sa simplicité conceptuelle et le fait qu'elle est facile à implémentée. Pour plus de détails voir Maury [?].
Le principe général de la méthode est le suivant :
Etant donné une fonctionnelle J sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un sous-espace. Alors minimiser J sur $\mathcal{K}$ est équivalent à minimiser $J + I_{\mathcal{K}}$ sur $\mathcal{H}$ avec

$$I_{\mathcal{K}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{K} \\ +\infty & \text{si } x \notin \mathcal{K}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Supposons maintenant que :

$$\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{H} \quad | \quad \Psi(v) = 0\}, \quad (\Psi \geq 0). \tag{2.2}$$

La méthode de pénalisation consiste à considérer la fonctionnelle relaxée :

$$J_\varepsilon = J + \frac{\Psi}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

Nous considérons le problème :

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\text{Trouver } u \in \mathcal{K} \text{ tel que}\\ J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in \mathcal{K}\end{cases} \tag{2.3}$$

et le problème pénalisé :

$$(\mathcal{P}^{\varepsilon})\begin{cases}\text{Trouver } u_{\varepsilon} \in \mathcal{H} \text{ tel que}\\ J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \leq J_{\varepsilon}(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}\end{cases} \tag{2.4}$$

Pour toute la suite, nous supposons que :

$$\left|\begin{array}{c}\mathcal{H} \text{ et } \Lambda \text{ deux espaces de Hilbert, } \varphi \in \mathcal{H}'\\ a(\cdot,\cdot) \text{ une forme bilinéaire continue et coercive sur } \mathcal{H}.\\ b(\cdot,\cdot) \text{ une forme bilinéaire symétrique continue et non négative sur } \mathcal{H}.\\ \mathcal{K} = \{v \in \mathcal{H} \quad | \quad b(v,v) = 0\} = \{v \in \mathcal{H} \quad | \quad Bv = 0\}, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \Lambda)\\ \mathcal{K} \text{ un sous-espace vectoriel fermé de } \mathcal{H}\\ J(v) = \dfrac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle, \quad u = \arg\min\limits_{\mathcal{K}} J\\ J_{\varepsilon}(v) = \dfrac{1}{2}a(v,v) + \dfrac{1}{2\varepsilon}b(v,v) - \langle \varphi, v \rangle, \quad u_{\varepsilon} = \arg\min\limits_{\mathcal{H}} J_{\varepsilon}\end{array}\right\}. \tag{2.5}$$

Proposition 2.1.1. Les problèmes de minimisation (2.3) et (2.4) sont équivalents aux problèmes variationnels suivants :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{trouver } u \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ \quad a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle\,, \quad \forall v \in \mathcal{K}.\end{array}\right. \tag{2.6}$$

et

$$\left\{\begin{array}{c}\text{trouver } u^{\varepsilon} \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ a(u^{\varepsilon},v) + \dfrac{b(u^{\varepsilon},v)}{\varepsilon} = \langle \varphi, v\rangle\,, \quad \forall v \in \mathcal{H}.\end{array}\right. \tag{2.7}$$

Donc si les hypothèses (2.5) sont vérifiées, alors le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité d'une solution au problèmes (2.3) et (2.4).
La proposition suivante est à la fois élémentaire et essentielle à la compréhension des différentes formulations qui peuvent êtres se présentées.

Proposition 2.1.2. Nous avons

$$a(u,v) - \langle \varphi, v\rangle = \langle \xi, v\rangle\,, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{2.8}$$

où $\xi \in (\mathcal{K}^{\perp})'$, avec

$$\mathcal{K}^{\perp} = \{\psi \in \mathcal{H}', \quad \langle \psi, v\rangle = 0, \quad \forall v \in \mathcal{K}\},$$

Démonstration. .
Nous avons $a(\cdot,v)$ et φ deux formes linéaires continues sur $\mathcal{H}$, i.e., $a(\cdot,v), \varphi \in \mathcal{H}'$. Nous observons que pour tout $v \in \mathcal{K}$ on a $a(u,v) - \langle \varphi, v\rangle = 0$ donc $(a(u,\cdot) - \langle \varphi, \cdot\rangle) \in (\mathcal{K}^{\perp})'$ □

Remarque 2.1.1. La forme linéaire ξ aura en général une signification physique claire dans les applications (voir Maury [**?**] pour des exemples concrets). Cette forme linéaire ξ est unique. On distinguera bien ce fait de l'éventuelle unicité de ce que nous appelons un multiplicateur de Lagrange. La non unicité de ce multiplicateur de Lagrange tient au fait que nous chercherons à écrire ξ sous la forme $B^*\lambda$, ou B est un opérateur pas toujours surjectif ni même à image dense (de telle sorte que B peut ne pas être injectif).

Théorème 2.1.1. On se place dans le cadre des hypothèses (2.5). On suppose de plus que B est à image fermée dans Λ. Alors il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $(u, \lambda) \in \mathcal{K} \times \Lambda$ soit solution de

$$Au + B^*\lambda = \varphi$$

c'est à dire

$$a(u, v) + (\lambda, Bv) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{2.9}$$

Démonstration. On pose $\xi = \varphi - Au$ alors il est claire que $\xi \in \mathcal{K}^\perp$. Si B est à image fermée dans Λ, alors $\mathcal{K}^\perp = (\ker B)^\perp = \mathrm{Im}(B^*)$, (voir Brézis [?] p.28 ou Annexe B de ce polycopié). Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathrm{Im} B^*$ tel que

$$\xi = B^*\lambda \iff B^*\lambda = \varphi - Au \iff Au + B^*\lambda = \varphi.$$

□

Proposition 2.1.3. Si les hypothèses (2.5) sont vérifiées. Alors la solution u^ε du problème (2.4) converge fortement vers la solution u du problème (2.3).

Démonstration. Premièrement, nous démontrons que : $|u^\varepsilon|$ est uniformément borné.
On utilise le fait que le problème pénalisé est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ a(u^\varepsilon, v) + \dfrac{1}{\varepsilon} b(u^\varepsilon, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.10}$$

Alors, pour $v = u^\varepsilon$ dans (2.10) et on utilise le fait que, $a(\cdot, \cdot)$ est coercive et $\varphi \in \mathcal{H}'$ on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha |u^\varepsilon|^2 \leq a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \langle \varphi, u^\varepsilon \rangle \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}'} |u^\varepsilon| \\ \Rightarrow \qquad |u^\varepsilon| \leq \frac{\|\varphi\|_{\mathcal{H}'}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Donc $\exists u^* \in \mathcal{H}$ telle que $u^\varepsilon \rightharpoonup u^*$ (convergence faible voir Annexe A.3)

$$\begin{aligned} J(u^\varepsilon) &\leq J_\varepsilon(u^\varepsilon), && (J_\varepsilon = J + \geq 0) \\ &\leq J_\varepsilon(u), && (u^\varepsilon = \arg\min_{\mathcal{H}} J_\varepsilon) \\ &= J(u), && (b(u, u) = 0, u \in \mathcal{K}) \end{aligned}$$

donc

$$J(u^\varepsilon) \leq J(u) \tag{2.11}$$

Mais, puisque J est continue

$$\lim\ \inf J(u^\varepsilon) \leq J(u). \tag{2.12}$$

et puisque, J est convexe (Exercice 2.2) et continue donc elle est faiblement semi-continue inférieurement (voir Brézis [?] p.38) ; i.e., si $u^\varepsilon \rightharpoonup u^*$ alors

$$\lim\ \inf J(u^\varepsilon) \geq J(u^*). \tag{2.13}$$

(2.12) et (2.13) donnent

$$J(u^*) \leq J(u). \tag{2.14}$$

Pour démontrer que $u^* = u$ il suffit de prouver que $u^* \in \mathcal{K}$. En effet, on a déjà vu que

$$J_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq J(u).$$

Alors,

$$\frac{b(u^\varepsilon, u^\varepsilon)}{\varepsilon} \leq Cte \Rightarrow b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \to 0,\ \text{lorsque } \varepsilon \to 0.$$

La forme b est symétrique positive et continue, alors,

$$\begin{aligned}
&b(u^\varepsilon - u^*, u^\varepsilon - u^*) \geq 0 && (2.15)\\
\Rightarrow \quad & b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq 2b(u^\varepsilon, u^*) - b(u^*, u^*) && (2.16)\\
\Rightarrow \quad & b(u^*, u^*) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = 0 \Rightarrow u^* \in \mathcal{K}. && (2.17)
\end{aligned}$$

Alors, (2.14) implique que $u = u^*$.
Nous montrons maintenant que la convergence est forte, i.e.,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |u^\varepsilon - u| = 0 \iff \lim_{\varepsilon\to 0} a(u^\varepsilon - u, u^\varepsilon - u) = 0,$$

puisque on a démontrer que $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ il suffit de démontrer que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = a(u, u).$$

Nous rappelons qu'une suite k_ε à valeurs dans $\mathbb{R}$ converge si et seulement si

$$\liminf k_\varepsilon = \limsup k_\varepsilon,\ \text{ qui est alors la limite.}$$

On a la forme $F(v) = a(v, v)$ est convexe et continue, et par conséquent (faiblement s.c.i)

$$a(u, u) \leq \liminf a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \tag{2.18}$$

et on aussi,

$$\frac{1}{2}a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) - \langle\varphi, u^\varepsilon\rangle \leq \frac{1}{2}a(u, u) - \langle\varphi, u\rangle \tag{2.19}$$

par conséquent,

$$\limsup a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq a(u, u) \tag{2.20}$$

Donc d'après (2.18) et (2.20) on

$$\limsup a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \liminf a(u^\varepsilon, u^\varepsilon).$$

donc

$$\limsup a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \liminf a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = a(u, u),$$

puisque on a toujours $\liminf \leq \limsup$. □

Remarque 2.1.2. La Proposition (2.1.3) affirme que u^ε converge fortement vers u, mais elle ne donne aucune information sur l'ordre de convergence.

On introduit $\xi \in \mathcal{H}'$ comme l'unique fonctionnelle qui satisfait :

$$a(u, v) + \langle \xi, v \rangle = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{2.21}$$

Proposition 2.1.4. Soit $\xi^\varepsilon \in \mathcal{H}'$ définit par :

$$v \in \mathcal{H} \longmapsto \langle \xi^\varepsilon, v \rangle = \frac{b(u^\varepsilon, v)}{\varepsilon}.$$

Alors, ξ^ε converge fortement dans $\mathcal{H}'$ vers ξ, au moins, de même ordre de la convergence de u^ε vers u.

Démonstration. Le problème pénalisé est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ a\left(u^\varepsilon, v\right) + \dfrac{1}{\varepsilon} b\left(u^\varepsilon, v\right) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.22}$$

donc $\forall v \in \mathcal{H}$

$$a(u, v) + \langle \xi, v \rangle = \langle \varphi, v \rangle, \tag{2.23}$$

$$a(u^\varepsilon, v) + \langle \xi^\varepsilon, v \rangle = \langle \varphi, v \rangle. \tag{2.24}$$

Ceci implique que :

$$\langle \xi^\varepsilon - \xi, v\rangle = a(u^\varepsilon - u, v).$$

Nous avons :

$$\|\xi^\varepsilon - \xi\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{v\in\mathcal{H}} \frac{\langle \xi^\varepsilon - \xi, v\rangle}{\|v\|_{\mathcal{H}}}$$

Par conséquent,

$$\alpha|u^\varepsilon - u| \leq \|\xi^\varepsilon - \xi\|_{\mathcal{H}'} \leq C|u^\varepsilon - u|. \tag{2.25}$$

□

Proposition 2.1.5. Supposons que les hypothèses (2.5) sont satisfaites, de plus on suppose qu'il existe $\tilde{\xi} \in \mathcal{H}$ tel que

$$b(\tilde{\xi}, v) = \langle \xi, v\rangle, \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{H}. \tag{2.26}$$

Alors,

$$|u^\varepsilon - u| = \mathrm{O}(\varepsilon). \tag{2.27}$$

Démonstration. Notons dans un premier temps qu'il est licite de prendre $\tilde{\xi}$ dans $\mathcal{K}^\perp$ (sinon, on le remplace par sa projection sur $\mathcal{K}^\perp$). On introduit maintenant la nouvelle fonctionnelle

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(v) &= \frac{1}{2}a(u-v,u-v) + \frac{1}{2\varepsilon}b(\varepsilon\tilde{\xi}-v, \varepsilon\tilde{\xi}-v) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{\varepsilon}{2}b(\tilde{\xi},\tilde{\xi}) + \underbrace{\frac{1}{2}a(v,v) + \frac{1}{2\varepsilon}b(v,v) - a(u,v) - b(\tilde{\xi},v)}_{J_\varepsilon(v)} \end{aligned}$$

Puisque,

$$b(\tilde{\xi}, v) = \langle \xi, v\rangle, \quad \text{et} \quad a(u,v) + \langle \xi, v\rangle = \langle \varphi, v\rangle$$

et par suite R_ε est égal à J_ε plus une quantité qui ne dépend pas de v, et par conséquent, minimiser J_ε est équivalent à minimiser R_ε.
On introduit maintenant l'élément $w = \varepsilon\tilde{\xi} + u$. On a

$$R_\varepsilon(w) = \frac{\varepsilon^2}{2}a(\tilde{\xi},\tilde{\xi}) + 0, \quad \text{car } u \in \mathcal{K}$$

et ainsi

$$|R_\varepsilon(w)| \leq Cte\ \varepsilon^2.$$

Comme u^ε minimise R_ε alors on a

$$\begin{aligned} 0 \leq R_\varepsilon(u^\varepsilon) &= \frac{1}{2}a(u-u^\varepsilon,u-u^\varepsilon)+\frac{1}{2\varepsilon}b(\varepsilon\tilde{\xi}-u^\varepsilon,\varepsilon\tilde{\xi}-u^\varepsilon) \\ &\leq |R_\varepsilon(w)| \leq Cte\ \varepsilon^2 \\ \Rightarrow \quad a(u-u^\varepsilon,u-u^\varepsilon) &\leq Cte\ \varepsilon^2 \end{aligned}$$

dont on déduit, d'après la coercivité de $a(,)$, la majoration de l'erreur en $\mathrm{O}(\varepsilon)$. □

Le corollaire suivant montre qu'on peut obtenir l'estimation de la proposition 2.1 avec une condition strictement plus faible.

Corollaire 2.1.1. Supposons que les hypothèses (2.5) sont satisfaites, de plus on suppose qu'il existe un opérateur B linéaire et continu de $\mathcal{H}$ dans un espace de Hilbert Λ à image fermée, notée $\mathrm{Im}(B)$, tel que

$$b(w,v) = (Bw,Bv), \qquad \text{pour tout } w,v \in \mathcal{H}. \tag{2.28}$$

Alors

$$|u^\varepsilon - u| = \mathrm{O}(\varepsilon). \tag{2.29}$$

La démonstration du corollaire 2.1 fait appel au théorème du Banach de l'application fermée (voir Annexe C de ce polycopié)

Démonstration. Nous avons déjà prouver que $(Au-\varphi) \in \mathcal{H}'$ et elle s'annule sur $\mathcal{K}$. Donc, pour pouvoir appliquer la proposition 2.1 il suffit de démontrer que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ qui s'annule sur $\mathcal{K}$ peut être identifier à un élément de $\mathcal{H}$ à travers la forme b. Autrement dit,

$$\forall \xi \in \mathcal{H}', \langle \xi, v\rangle = 0, \forall v \in \mathcal{K} \Longrightarrow \exists \tilde{\xi} \in \mathcal{H} \text{ tel que } b(\tilde{\xi},v) = \langle \xi, v\rangle\,, \forall v \in \mathcal{K}^\perp \tag{2.30}$$

On introduit l'opérateur $T : \mathcal{H} \to (\mathcal{K}^\perp)'$ qui à chaque $\tilde{\xi} \in \mathcal{H}$ associe la forme linéaire ξ définie par la relation

$$b(\tilde{\xi},v) = \langle \xi, v\rangle = \left\langle T\tilde{\xi}, v\right\rangle, \forall v \in \mathcal{K}^\perp$$

Alors, on a

$$|T^*(w)| = \sup_{v\neq 0}\frac{\langle T^*w,v\rangle}{|v|} = \sup_{v\neq 0}\frac{\langle Tv,w\rangle}{|v|} = \sup_{v\neq 0}\frac{b(v,w)}{|v|} = \sup_{v\neq 0}\frac{(Bv,Bw)}{|v|} \geq \frac{|Bw|^2}{|w|} \geq \alpha|w|$$

Par conséquent, l'opérateur T est surjectif. □

Remarque 2.1.3. L'hypothèse " l'opérateur B est à image fermée " est une condition suffisante mais elle est loin d'être nécessaire. En effet l'exemple suivant montre qu'on peut avoir une estimation d'erreur O(ε) avec "B" n'est pas à image fermée (voir Exercice 2.5 ou [?]).

2.2 Exemples d'application

Exemple 2.2.1. On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier ([1]), et $f \in L^2(\Omega)$ tel que la solution du problème de Dirichlet a la régularité H^2 et on considère le problème qui consiste à :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Chercher } u \in \mathcal{K} = H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \qquad J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in \mathcal{K} \end{cases} \tag{2.31}$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega fv dx$$

et le problème pénalisé :

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \begin{cases} \text{Chercher } u_\varepsilon \in \mathcal{H} = H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \qquad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v), \quad \forall v \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.32}$$

avec

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega} v^2 ds - \int_\Omega fv dx$$

Toutes les hypothèse (2.5) sont satisfaites. De plus on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega fv dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds, \quad \forall v \in H^1. \tag{2.33}$$

Puisque $v \mapsto \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds$ est une forme linéaire et continue sur $H^1(\Omega)$, donc il existe $\xi \in (H^1(\Omega))'$ tel que :

$$\langle \xi, v \rangle = \int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds, \quad \forall v \in H^1,$$

et puisque $u \in H^2$ alors $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. L'opérateur de trace γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est surjectif donc il existe $\tilde{\xi} \in H^1(\Omega)$ telle que $\tilde{\xi}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}$, et par conséquent

$$b(\tilde{\xi}, v) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \langle \xi, v \rangle \quad \forall v \in H^1$$

1. Par exemple de classe C^2

Remarque 2.2.1. Le corollaire qui précède est strictement plus faible que le résultat général de convergence à l'ordre 1. L'exemple précédent montre que $|u^\varepsilon - u| = \mathrm{O}(\varepsilon)$ alors que la forme $b(,)$ ne vérifie pas la condition du corollaire 2.1, car l'espace $H^{1/2}$ des traces de fonctions de H^1 n'est pas fermé dans $L^2(\partial\Omega)$. En effet, il suffit de considérer une suite de fonctions Lipschiziennes converge (dans L^2) vers une fonction discontinue, Heaviside, par exemple, cette dernière fonction (limite) n'est pas dans $H^{1/2}$.

Exemple 2.2.2. Soit

$$\mathcal{H} = \{v \in H^1(I) | \quad v(-1) = 0\}, \qquad \text{et} \qquad \mathcal{K} = \{v \in \mathcal{H} | v' = 0, \text{p. p dans } [-1, 0]\}$$

On introduit la forme bilinéaire

$$a_\varepsilon(u, v) = a(u, v) + \frac{1}{\varepsilon} b(u, v) = \int_{-1}^{1} u'v'dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{0} u'v'dx \tag{2.34}$$

et la forme linéaire

$$F(v) = \langle \delta, v \rangle = v(0). \tag{2.35}$$

alors u^ε est l'unique solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = F(v), \forall v \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.36}$$

Toutes les hypothèse (2.5) sont satisfaites. De plus, on a la forme b s'écrit sous la forme :

$$b(v, w) = (Bv, Bw), \quad \text{avec } Bv = v', \text{si } x \in [0, 1], \quad Bv = 0 \text{ si } x \in [-1, 0]$$

$$\Lambda = \left\{v \in L^2]0, 1[\right\}$$

Pour démontrer que $|u^\varepsilon - u| = \mathrm{O}(\varepsilon)$ il suffit de démontrer que $\mathcal{R}(B)$ est fermé dans Λ (voir corollaire 2.1).

On postule un développement asymptotique de u^ε :

$$u^\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + ... \tag{2.37}$$

L'identification formelle des puissance de ε conduit à :

$$b(u_0, v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}, \tag{2.38}$$
$$a(u_0, v) + b(u_1, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}, \tag{2.39}$$
$$\vdots \tag{2.40}$$
$$\vdots \tag{2.41}$$
$$a(u_j, v) + b(u_{j-1}, v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}, j = 1, 2, ... \tag{2.42}$$

Pour que (2.38) ait lieu, il faut et il suffit que

$$u_0 \in \mathcal{K}.$$

Par restriction de (2.39), (2.42) à $\mathcal{K}$, on obtient :

$$a(u_0, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathcal{K} \tag{2.43}$$

$$\vdots \tag{2.44}$$

$$a(u_j, v) = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{K} \quad j = 1, ... \tag{2.45}$$

Alors on a l'estimation d'erreur suivante :

Théorème 2.2.1. La fonction u_ε est la solution de(1.147). Les élément $u_0, ..., u_j, ...$ sont calcules à partir des formules (2.38) (2.39) (2.42). Alors

$$\|u_\varepsilon - \big(u_0 + \varepsilon u_1 + ... + \varepsilon^j u_j\big)\| \leq C\varepsilon^{j+1} \tag{2.46}$$

où C désigne une constante indépendant de ε.

Démonstration. Posons

$$\varphi_\varepsilon = \frac{u_{-1}}{\varepsilon} + u_0 + ... + \varepsilon^j u_j, \quad \text{et} \quad \phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon + \varepsilon^{j+1} u_{j+1},$$

$$a_\varepsilon(u, v) = a(u, v) + \varepsilon^{-1} b(u, v) \qquad \text{et} \quad \omega_\varepsilon = u_\varepsilon - \phi_\varepsilon$$

On a

$$a_\varepsilon(\phi_\varepsilon, v) = (f, v) + \varepsilon^{j+2} a(u_{j+1}, v),$$
$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (f, v)$$

et par conséquent :

$$a_\varepsilon(\omega_\varepsilon, v) = -\varepsilon^{j+2} a(u_{j+1}, v) \quad \forall v \in \mathcal{H} \tag{2.47}$$

Faisant $v = \omega_\varepsilon$ dans (2.39), on déduit que

$$|\omega_\varepsilon|^2_{H^1(I)} + \varepsilon^{-1} |\omega_\varepsilon|^2_{H^1(-1,0)} \leq C\varepsilon^{j+2} |\omega_\varepsilon|_{H^1(I)}. \tag{2.48}$$

donc(2.48) entraine

$$|\omega_\varepsilon|_{1,I} \leq C\varepsilon^j$$

et par conséquent

$$\|u_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\| + \|\omega_\varepsilon + \varepsilon^{j+1} u^{j+1}\| \leqslant C\varepsilon^{j+1}$$

□

2.3 Exercices

Exercice 2.1. (pénalisation et blockage membranaire).
Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ et soit $\mathcal{K}$ l'espace défini par

$$\mathcal{K} = \left\{ v; v \in H^1(\Omega), v(x_1, 0) = 0, \frac{\partial v}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \right\} \tag{2.49}$$

où $\alpha > 0$ est une constante donnée [2].
Soit $f \in L^2(\Omega)$ une fonction donnée, on se propose de résouder le probléme suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{K} \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \; \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in \mathcal{K}. \end{cases} \tag{2.50}$$

1. Vérifier que les hypothèses de Lax-Miligram sont satisfaites.

2. Soit V l'espace

$$V = \left\{ w; w \in H^1(\Omega), w(x_1, 0) = 0 \right\}$$

On désigne par $u^\varepsilon, \varepsilon$ positif fixé, la solution du probléme pénelisé

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ a(u^\varepsilon, w) + \dfrac{1}{\varepsilon} b(u^\varepsilon, w) = (f, w), \quad \forall w \in V \end{cases} \tag{2.51}$$

où

$$b(u^\varepsilon, w) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) dx. \tag{2.52}$$

$$a(u^\varepsilon, w) = \int_\Omega \nabla u^\varepsilon \; \nabla w \; dx \tag{2.53}$$

et ε est petit paramétre destiné à tender vers zéro.

a. Montrer que, dans une certaine topologie que l'on précisera, $u^\varepsilon \longrightarrow u$ solution du probléme (2.50).

3. Dans le but de calculer numériquement la solution de (2.51), on introduit un espace d'éléments finis de la façon suivante (approximation $\mathbb{P}_1$) : On divise le domaine Ω en $2/h^2$ triangles, V_h est l'espace des fonctions v affines sur chaque triangle, continues sur les arêtes communes et qui satisfont à la condition

$$v(x, 0) = 0 \tag{2.54}$$

Ces fonctions peuvent être définies par leurs valeurs aux nœuds du maillage, autres que ceux qui se trouvent sur l'axe des x_1, L'espace V_h est alors de dimension

$$\frac{1}{h}\left(1 + \frac{1}{h}\right)$$

En accord avec les méthodes classiques on fait l'approximation d'ordre h en remplaçant l'espace V par l'espace V_h et on cherche $u^{\varepsilon h} \in V_h$ solution de

$$a(u^{\varepsilon h}, v) + \frac{1}{\varepsilon} b(u^{\varepsilon h}, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \;\; \forall \; v \in \; V_h$$

2. La condition $\frac{\partial v}{\partial x_1} + a\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$ est imposée sur tout le domaine Ω et constitue une contrainte

a. Montrer que si h est fixé et $\varepsilon \searrow 0$ alors $u^{\varepsilon h}$ converge vers $u^h \in \mathcal{K} \cap V_h$ solution unique de

$$a(\ u^h, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall\ v \in \mathcal{K} \cap\ V_h$$

b. Montrer que $\mathcal{K} \cap V_h\ = \{0\}$. Conséquence ?

c. Peut-on prendre $u^{\varepsilon h}$ avec ε et h petits comme approximation de u^*?

Exercice 2.2. (Caractérisation de fonction convexe). Soit a une forme bilinéaire symétrique continue sur $V \times V$ et L une forme linéaire continue sur V. On pose

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$$

1. Montrer que J est dérivable sur V et que

$$\langle J'(v), w\rangle = a(v, w) - L(w)$$

pour tous $v, w \in V$.

2. Supposons maintenant de plus, que a est coercive sur V.

a. Montrer que :

$$\langle J'(v) - J'(w), v - w\rangle \geq 0, \tag{2.55}$$

b. Montrer que J est convexe.

Exercice 2.3. Soit $I =]0, 1[$, $\mathcal{H} = H^1(I)$ et on considère le problème qui consiste à minimiser la fonctionnelle :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx$$

sur l'espace

$$\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{H} \quad | \quad v = 0 \text{ p.p dans }]0, 1/2[\},$$

i.e., on considère le problème :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in \mathcal{K} \end{cases} \tag{2.56}$$

1. Vérifier que la fonction :

$$u(x) = \max(0, 2x - 1) \tag{2.57}$$

est la solution du problème (2.56)

2. On considère le problème pénalisé qui consiste à minimiser la fonctionnelle :

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{1/2} |v|^2 dx$$

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in \mathcal{H} \text{ tel que} \\ J_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v), \quad \forall v \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.58}$$

3. Vérifier que la fonction :

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} k^\varepsilon(x)\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right), & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases} \tag{2.59}$$

avec $k^\varepsilon(x) = \left(\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)^{-1}$ est la solution du problème (2.58).

4. Montrer que

$$|u^\varepsilon - u| = \mathrm{O}(\varepsilon^{1/4}).$$

5. Expliquer pour quelle raison on ne peut pas avoir l'estimation de la proposition 2.1.

Exercice 2.4. Supposons que les hypothèses (2.5) sont satisfaites, de plus on suppose qu'il existe un opérateur B linéaire et continu de $\mathcal{H}$ dans un espace de Hilbert Λ à image fermée, notée $\mathcal{R}(B)$, tel que

$$b(u, v) = (Bu, Bv), \qquad \text{pour tout } v \in \mathcal{H}. \tag{2.60}$$

1. Montrer que :

$$|u^\varepsilon - u| = \mathrm{O}(\varepsilon). \tag{2.61}$$

2. Supposons maintenant, qu'il exist $\lambda \in \Lambda$ tel que

$$a(u, v) + (\lambda, Bv) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{2.62}$$

Montrer que la solution est unique dans $B(\mathcal{H})$.

3. On introduit maintenant $\lambda^\varepsilon \in \Lambda$ définit par :

$$\lambda^\varepsilon = \frac{Bu^\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Montrer que :

$$|\lambda^\varepsilon - \lambda| = \mathrm{O}(\varepsilon). \tag{2.63}$$

Exercice 2.5. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$. On suppose que soit Ω est convexe ou $\partial\Omega$ est suffisamment régulière. Soit $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^2(\Omega)$. On considère le problème aux limites suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.64}$$

et on considère le problème pénalisé suivant :

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} + \varepsilon^{-1}(u^\varepsilon - g) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.65}$$

1. Ecrire le problème variationnel correspondant à (2.64) est montrer qu'il est bien posé.

2. Ecrire le problème variationnel correspondant à (2.65) sous la forme :

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^{-1} b(u^\varepsilon, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.66}$$

est montrer qu'il est bien posé.

3. Soit B l'opérateur tel que

$$b(w, v) = (Bw, Bv), \quad \forall w, v$$

Montrer que B n'est pas à image fermée.

4. Montrer que

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\ \varepsilon$$

où C est une constante indépendante de ε.

Chapitre 3

Reduction de dimension

3.1 introduction

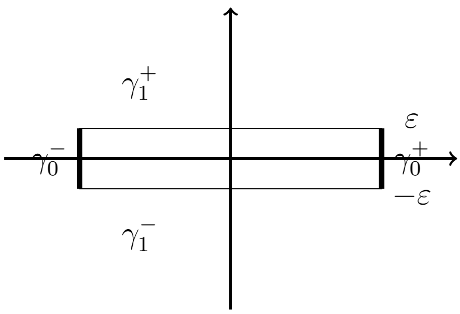
3.2 Le problème de Poisson dans un rectangle mince

On considère le rectangle mince :

$$\Omega^\varepsilon :=]-1,1[\times]-\varepsilon,\varepsilon[$$

La frontière $\partial\Omega^\varepsilon = \gamma_0^\varepsilon \cup \gamma_1^\varepsilon$, où

$$\gamma_0^\varepsilon = \{-1,1\}\times]-\varepsilon,\varepsilon[, \quad \text{et} \quad \gamma_1^\varepsilon = \{-\varepsilon,\varepsilon\}\times]-1,1[$$



Nous considérons le problème qui consiste à déterminer $u^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ qui satisfie (au sense faible)

$$\begin{aligned} -\Delta u^\varepsilon &= f^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ u^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \gamma_0^\varepsilon \\ \partial_n u^\varepsilon &= g^\varepsilon \quad \text{sur } \gamma_1^\varepsilon \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $f^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \to \mathbb{R}$ et $g^\varepsilon : \gamma_1^\varepsilon \to \mathbb{R}$.
Pour determiner un développement asymptotique de u^ε, la première étape consiste à se ramener le problème à un problème posé sur un domain indépendant de ε,

$$\Omega =]-1,1[\times]-1,1[.$$

Pour ceci, on introduit le changement de variables suivant :

$$x := (x_1, x_2) = (x_1^\varepsilon, \frac{x_2^\varepsilon}{\varepsilon}) := x^\varepsilon \tag{3.2}$$

Dans le domain $\bar{\Omega}$ on définit,

$$u(\varepsilon)(x) = u^\varepsilon(x^\varepsilon), \quad f(x) = f^\varepsilon(x^\varepsilon), \quad \text{et } g(x) = \varepsilon^{-1} g^\varepsilon(x^\varepsilon) \tag{3.3}$$

A' l'aide de ces changement de variables (3.2) et d'inconnus (3.3) le problème (3.1) se transforme au problème suivant :

$$\begin{aligned} -(\partial_1^2 + \varepsilon^{-2}\partial_2^2)u(\varepsilon) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u(\varepsilon) &= 0 \quad \text{sur } \gamma_0 \\ \partial_n u(\varepsilon) &= \varepsilon^2 g \quad \text{sur } \gamma_1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour simplicité, on suppose que f et g sont indépendantes de ε.
On postule le développement asymptotique :

$$u(\varepsilon) \approx u^{(0)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \varepsilon^4 u^{(4)} + \ldots$$

Par substitution formelle dans (3.4), on trouve :

$$-\varepsilon^{-2}\partial_2^2 u^{(0)} - (\partial_1^2 u^{(0)} + \partial_2^2 u^{(2)}) - \varepsilon^2(\partial_1^2 u^{(2)} + \partial_2^2 u^{(4)}) - \ldots = f \quad \text{dans } \Omega \tag{3.5}$$

$$\partial_n u^{(0)} + \varepsilon^2 \partial_n u^{(2)} + \varepsilon^4 \partial_n u^{(4)} + \ldots = \varepsilon^2 g \quad \text{sur } \gamma_1 \tag{3.6}$$

en identifiant les puissances de ε cela exige,

$$-\partial_2^2 u^{(0)} = 0 \tag{3.7}$$

$$-\partial_2^2 u^{(2)} = f + \partial_1^2 u^{(0)} \tag{3.8}$$

$$-\partial_2^2 u^{(2k)} = \partial_1^2 u^{2k-2}, \quad k \geq 1 \tag{3.9}$$

avec les conditions aux limites :

$$\partial_n u^{(2k)} = \delta_{k1} g, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \tag{3.10}$$

Les équations (3.7-3.8-3.9,3.10) définissent une série de problèmes de Neumann sur l'intervalle $x_2 \in (-1, 1)$ paramétrisés par $x_1 \in (-1, 1)$. Si les données sont compatibles, alors la solution s'écrit sous la forme :

$$u^{(2k)}(x) = \tilde{u}^{(2k)}(x) + \xi^{(2k)}(x_1), \quad \text{pour } k \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

avec

$$\int_{-1}^{1} \tilde{u}^{(2k)}(x_1, x_2)\, dx_2 = 0 \tag{3.12}$$

qui détermine $\tilde{u}^{(2k)}$ de façon unique, mais les $\xi^{(2k)}$ sont des fonction arbitraire de x_1. Les conditions de Dirichlet, exigent naturellement, que $u^{(2k)} = 0$ sur γ_0. Ceci est équivalent,

$$\xi^{(2k)}(-1) = \xi^{(2k)}(1) = 0 \tag{3.13}$$

$$\tilde{u}^{(2k)} = 0 \quad \text{sur } \gamma_0 \tag{3.14}$$

Remarque 3.2.1. Dans le cas général, la condition (3.13) peut être imposée, mais pas la condition (3.14).

Maintenant, nous verrons que $\tilde{u}^{(2k)}$ et $\xi^{(2k)}$ peut etre déterminer de façon unique en utilisant les équations précédentes. En effet, de (3.7) et (3.10) en déduit que $\tilde{u}^{(0)} = 0$. La compatibilié de (3.8) et (3.10) s'écrit :

$$\int_{-1}^{1} (f + \partial_1^2 u^{(0)})\ dx_2 - g(x_1, 1) + g(x_1, -1) = 0 \tag{3.15}$$

En utilise le fait que $\tilde{u}^{(0)} = 0$, on trouve

$$-\partial_1^2 \xi^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\ dx_2 + \frac{g(x_1, 1) - g(x_1, -1)}{2} \tag{3.16}$$

On note que $\partial_n = \partial_2$ sur γ_1^+ et $\partial_n = -\partial_2$ sur γ_1^-. L'équation (3.16) et (3.13) nous permet de déterminer ξ^0 et donc $u^{(0)}$. La condition de compatibilité (3.15) plus les équations (3.8-3.10) nous permet de déterminer $u^{(2)}$. Ensuite le problème de Neumann (3.9-3.10) admet une solution pour $k > 1$ si et seulement si $\partial_1^2 \xi^{2k-2} = 0$. Mais d'après (3.13) cela signifie que $\xi^{2k-2} = 0$ pour $k > 1$ et donc $\tilde{u}^{2k}$ est déterminée par (3.9-3.10) . On Note que

$$u^{(0)} = \xi^{(0)} \quad \text{et} \quad u^{(2k)} = \tilde{u}^{(2k)},\ \text{pour } k \geq 1$$

Nous observons que $u^{(0)}$ satisfait les conditions de Dirichlet sur le bord γ_0^ε, puisque $\tilde{u}^0 = 0$ mais cela n'est pas vrai pour les autres terms $u^{(2k)}, k \geq 1$. Alors on introduit un correcteur sur le bord U_-

$$U_- = \varepsilon^2 U^{(2)} + \varepsilon^4 U^{(4)} + \dots$$

où

$$\begin{aligned} (\partial_1^2 + \varepsilon^{-2}\partial_2^2) U_- &= 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon \\ \partial_n U_- &= 0 \text{ sur } \gamma_1^\varepsilon \end{aligned} \tag{3.17}$$

Observons que si on effectue le changement de variable

$$\rho_- = \frac{1 + x_1}{\varepsilon}$$

on obtient l'équation indépendante de ε suivante :

$$(\partial_{\rho_-}^2 + \partial_2^2) U = 0$$

cela nous permet de chercher U_- sur le domaine semi-infini $\Sigma = \mathbb{R}^+ \times (-1, 1)$ et les conditions de Neumann s'imposent donc sur $\Sigma_\pm = \mathbb{R}^+ \times \{-1, 1\}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on définit $U_-^{(2k)}$ par :

$$\begin{aligned} \Delta U_-^{(2k)} &= 0 \quad \text{dans } \Sigma \\ \partial_n U_-^{(2k)} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_\pm \\ U_-^{(2k)}(0, x_2) &= u^{(2k)}(-1, x_2) \quad \text{si } x_2 \in (-1, 1) \end{aligned} \tag{3.18}$$

De façon similaire, on pose $\rho_- = \dfrac{1-x_1}{\varepsilon}$ et on définit U_+ comme solution de

$$\begin{aligned} \Delta U_+^{(2k)} &= 0 \quad \text{dans } \Sigma \\ \partial_n U_+^{(2k)} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_\pm \\ U_+^{(2k)}(0,x_2) &= u^{(2k)}(1,x_2) \quad \text{si } x_2 \in (-1,1) \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$u^\varepsilon(x^\varepsilon) \sim \xi^0(x_1^\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} u^{(2k)}(x_1^\varepsilon, \varepsilon^{-1}x_2^\varepsilon) - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k}(U_-^{(2k)}(\rho_-, \varepsilon^{-1}x_2^\varepsilon) + U_+^{(2k)}(\rho_+, \varepsilon^{-1}x_2^\varepsilon))$$

3.3 Estimation d'erreur

$$e_N = u^\varepsilon(x^\varepsilon) - \xi^0(x_1^\varepsilon) + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{2k} u^{(2k)} - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{2k} (U_-^{(2k)} + U_+^{(2k)})$$

Théorème 3.3.1.

$$\|e_N\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{2N+3/2} \tag{3.20}$$

Exemple 3.3.1. On considère sur $\Omega^\varepsilon = (-1,1) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ le problème suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u^\varepsilon &= f \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ u^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \gamma_0^\varepsilon \\ \partial_n u^\varepsilon &= g \quad \text{sur } \gamma_{\pm 1}^\varepsilon \end{aligned} \tag{3.21}$$

avec :

$$f(x,y) = 4 - 2(x^2 + y^2), \quad \text{et} \quad g(x,y) = -2y(1 - x^2)$$

donc

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f \; dx_2 + \frac{g(x_1,1) - g(x_1,-1)}{2} = \frac{4}{3}$$

Alor, d'après (3.16), le problème limite s'écrit :

$$\begin{aligned} -\xi''(x_1) &= \frac{4}{3}, \quad x_1 \in (-1,1) \\ \xi(-1) &= \xi(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

donc

$$\xi(x_1) = \frac{2}{3}(1 - x_1^2)$$

$$f + \partial_1^2 \xi = -2(x^2 + y^2) + 8/3$$

$$\begin{cases} -\partial_2^2 u^{(2)} = f + \partial_1^2 \xi & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u^{(2)} = g & \text{sur } \gamma_1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} u^{(2)} \; dx_2 = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

$$u^{(2)}(x_1,x_2) = C_1(x_1) + C_2 x_2 + \frac{x_2^4}{6} + (x_1^2 - \frac{4}{3})x_2^2$$

$$\int_{-1}^{1} u^{(2)} \; dx_2 = 0 \implies C_1(x_1) = \frac{-1}{3}\left(x_1^2 - \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{30}$$

donc

$$u^{(2)}(x_1,x_2) = C_2 x_2 + \frac{x_2^4}{6} + (x_1^2 - \frac{4}{3})x_2^2 - \frac{1}{3}(x_1^2 - \frac{4}{3}) - \frac{1}{30}$$

$$\partial_{x_2} u^{(2)}(x_1,1) = C_2 + \frac{2}{3} + 2(x_1^2 - \frac{4}{3}) = 2x^2 - 2 \implies C_2 = 0$$

$$u^{(2)}(x,y) = \frac{x_2^4}{6} + (x_1^2 - \frac{4}{3})x_2^2 - \frac{1}{3}(x_1^2 - \frac{4}{3}) - \frac{1}{30}$$

3.4 Les système de l'élasticité dans un rectangle mince

Dans cette section on considère le problème de l'élasticité linéaire sur le domaine :

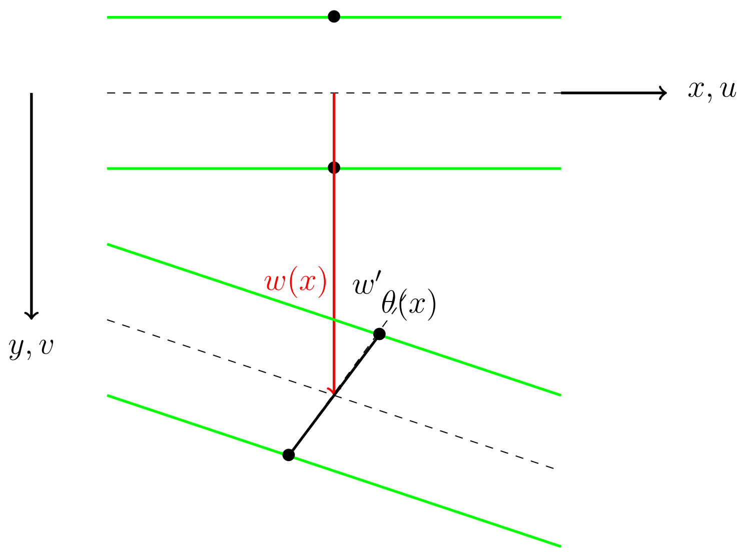
$$\Omega = (0,1) \times (-t/2, t/2)$$

où $t \in (0,1)$ est un petit paramètre. On impose les conditions de Dirichlet sur :

$$\Gamma_D = \{0\} \times (-t/2, t/2)$$

Soit V l'espace fonctionnel

$$V = \{v \in [H^1(\Omega)]^2; v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$



$$u(x, y) = -y \sin(\beta(x)) \approx -y\beta(x) \tag{3.24}$$

$$v(x, y) = v(x, 0) - y(1 - \cos(\beta(x))) \approx v(x, 0) \tag{3.25}$$

3.5 Système de Timoshenko

Le cas encastré,

$$\left.\begin{aligned} -\theta'' - t^{-2}(w' - \theta) &= 0 \\ -t^{-2}(w' - \theta)' &= f \end{aligned}\right\} \quad \text{p.p dans } \Omega \tag{3.26}$$

$$\begin{cases} \theta(0) = w(0) = 0 \\ w(L) = \theta(L) = 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

Pour les conditions mixtes Dirichlet-Neumann

$$\left.\begin{aligned} -\theta'' - t^{-2}(w' - \theta) = 0 \\ -t^{-2}(w' - \theta)' - \lambda = f \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(w - \psi) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{a.e in } \Omega \tag{3.28}$$

$$\begin{cases} \theta(0) = w(0) = 0 \\ w'(L) - \theta(L) = \theta'(L) = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Chapitre 4

Introduction à l'homogéneisation

Annexe A

Méthode de la variation des constantes

Soit l'équation différentielle linéaire non homogène suivante :

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \tag{A.1}$$

la solution générale de l'équation (A.1) s'écrit sous la forme :

$$y = y_g + y_p \tag{A.2}$$

Si on connait un système fondamentale de solutions $y_1, y_2, ..., y_n$ de l'équation homogène correspondante à (A.1), alors la solution générale de l'équation non homogène (A.1) peut être cherchée sous la forme :

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n, \tag{A.3}$$

où les coefficients $C_i(x), i = 1, \cdots, n$ sont définies par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{A.4}$$

A.1 Différentes formes de la solution particulière

Soit l'équation linéaire homogène du second ordre

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{A.5}$$

où p et q sont des constantes réelles. Pour trouver la solution générale de (A.5) il suffit de résoudre l'équation caractéristique :

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{A.6}$$

L'équation caractéristique (A.6) a comme racines :

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ et } k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Alors les trois cas suivants peuvent se présenter :

1. k_1 et k_2 deux réels distincts ($k_1 \neq k_2$). Alors les solutions particulières de (A.5) sont

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad \text{et} \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

2. k_1 et k_2 deux nombres complexes ($k_1 = \alpha + i\,\beta$ et $k_2 = \alpha - i\,\beta$). Alors les solutions particulières de (A.5) sont

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \text{et} \quad y_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) - ie^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

3. $k_1 = k_2$ (i.e l'équation (A.6) admet une racine double). Alors les solutions particulières de (A.5) sont

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad \text{et} \quad y_2 = xe^{k_1 x}.$$

Soit maintenant l'équation linéaire non homogène du second ordre

$$y'' + py' + qy = f(x)e^{\alpha x} \tag{A.7}$$

Alors les trois cas suivants peuvent se présenter :

1. α n'est pas une racine de l'équation (A.6) (i.e $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$). Alors la solution particulière de (A.7) prend la forme :

$$y_p = \frac{f(x)e^{\alpha x}}{\alpha^2 + p\alpha + q}$$

2. α est une racine simple de l'équation (A.6) (i.e $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$). Alors la solution particulière de (A.7) prend la forme :

$$y_p = \frac{(ax + b)f(x)e^{\alpha x}}{2\alpha + p}$$

3. α est une racine double de l'équation (A.6) (i.e $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$). Alors la solution particulière de (A.7) prend la forme :

$$y_p = \frac{(ax^2 + bx + c)f(x)e^{\alpha x}}{\alpha}$$

Annexe B

Fonctions s.c.i et convexité

B.1 Fonction semi-continue inférieurement

Définition B.1.1. Soit E un espace topologique. Une fonction $f : E \to]-\infty, +\infty]$ est dite semi continue inférieurement si pour tour réel α, l'ensemble

$$E_\alpha = \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$$

est fermé.

Comme propriété élémentaire des fonctions s.c.i, on peut démontrer que :
➤ si f est s.c.i alors pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de x tel que :

$$f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

Il résulte en particulier que si x_n converge vers x, et f est semi continue inférieurement alors

$$\liminf f(x_n) \geq f(x) \tag{B.1}$$

où

$$\liminf f(x_n) = \lim_{r \to 0} \left[\inf_{y \in B(x_n, r)} f(y) \right]$$

B.2 Fonctions convexes

Définition B.2.1. Une fonction $f : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite convexe si :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall t \in (0,1), \quad \forall x, y \in E$$

Définition B.2.2. Soit X un espace topologique, $\{x_n\}_n$ une suite de X. On dit que x_n converge faiblement vers la limite x et on note $x_n \rightharpoonup x$ si

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x), \forall F \in X'$$

Théorème B.2.1. (Brézis [**?**, p.38]) Soit E un espace topologique. Une fonction $f : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ convexe et s.c.i et $x_n \rightharpoonup x$. Alors

$$f(x) \leq \liminf f(x_n)$$

Annexe C

Théorème de Banach de l'application fermée

Le théorème de Banach de l'application fermée joue un rôle très important pour les problèmes de type point-selle pour plus de détails (voir Ern-Guremand [?])

Lemme C.0.1. Soit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \Lambda)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) Im(B) est fermé.
(ii) Il existe $\alpha > 0$, tel que :

$$\forall w \in Im(B), \exists v_w \in \mathcal{H}, \quad Bv_w = w, \quad \|Bv_w\|_\Lambda \geq \alpha \|v_w\|_\mathcal{H} \tag{C.1}$$

Lemme C.0.2. Soit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \Lambda)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $B : \mathcal{H} \to \Lambda$ est surjectif.
(ii) $B^* : \Lambda^{'} \to \mathcal{H}'$ est injectif et ImB^* est fermé dans Λ.
(iii) Il existe $\alpha > 0$, tel que :

$$\forall w \in \Lambda', \quad \|B^* w\|_{\Lambda'} \geq \alpha \|w\|_{\mathcal{H}'} \tag{C.2}$$