Analyse
Notes de cours et exercices

MERABET Smail

Université KASDI MERBAH- Ouargla

Introduction

Ce cours traite plusieurs sujets essentiels de l'analyse mathématique, notamment, les suites, les fonctions, les intégrales et les équations différentielles, mais bien sûr, on ne peut pas traiter des notions mathématiques sans faire passer par les notions d'algèbre.
L'objectif principale de ce cours est de familiariser l'étudiant ou le lecteur avec les notions de base de l'analyse mathématique qui représente la branche des mathématiques qui traite explicitement de la notion de limite, que ce soit la limite d'une suite ou la limite d'une fonction. Elle inclut également des notions comme la continuité, la dérivation et l'intégration. Ces notions sont étudiées dans le contexte des nombres réels ou des nombres complexes. Cependant, elles peuvent aussi être définies et étudiées dans le contexte plus général des espaces métriques ou topologiques.
Le fait que ce cours est destiné principalement aux étudiants de première année mathématique et informatique est suffisant pour donner une grande importance de ce contenu. L'ambition légitime de ce cours est de donner les principes de base permettront aux futures mathématiciens et aux futures informaticiens le développement de la recherche scientifique. Cependant, même ceux qui ne destinent pas à une telle carrière de chercheur ont intérêt de comprendre ces notions de base. En effet, même ceux qui veulent faire une carrière d'enseignement fondamental ou secondaire sont obligés d'avoir une idée plus générale et plus approfondie de ce qu'ils enseignent.
Le plans de ce cours est le suivant. Après un premier chapitre d'introduction sur le corps des nombres réels, où nous abordons les propriétés fondamentales de cet ensemble, en mettant le doigt sur les avantages de l'utilisation de $\mathbb{R}$ au lieu $\mathbb{Q}$. Le deuxième chapitre est consacré aux nombres complexes. Dans le troisième chapitre nous abordons les suites numériques réelles. Les chapitres 3,4,5 et 6 sont destinées à l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle. Le chapitre 7 traite la notion d'intégrale. Le dernier chapitre est consacré aux équations différentielles ordinaires. Chaque chapitre est suivi par une vingtaines d'exercices dont une partie est résolut en détail alors que pour le reste nous avons donné que des indications pour aider le lecture.

Chapitre 1

Le corps des réels $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, on imagine qu'on a construit :

- ☞ $\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels et
- ☞ $\mathbb{Z}$: l'ensemble des nombres entiers relatifs

Dans un premier temps, notre objectif est de construire rigoureusement, $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels.

1.1 Relation d'équivalence et relation d'order sur un ensemble

1.1.1 Relation d'équivalence

Définition 1.1

Soit E un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ de E dans E est dite :

- ➤ réflexive si : $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$
- ➤ symétrique si : $\forall x, y \in E : (x\mathcal{R}y) \implies (y\mathcal{R}x)$
- ➤ transitive si : $\forall x, y, z \in E : (x\mathcal{R}y) \quad \text{et} \quad (y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$

Définition 1.2

Une relation $\mathcal{R}$ est appelée une relation d 'équivalence sur E si elle est à la fois

- ☛ réflexive .
- ☛ symétrique .
- ☛ transitive .

Définition 1.3

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$. L'ensemble

$$\{y \in E \quad | y\mathcal{R}x\}$$

est appelé la classe d'équivalence de x et noté $\dot{x}$.

Exemple 1.1

Soient n un entier non nul et p, q deux éléments de $\mathbb{Z}$. On dit que p est congru à q modulo n et on note $p \equiv q[n]$ si

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad p - q = k \times n$$

La relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$p\mathcal{R}q \iff p \equiv q[n]$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.2: (Construction de $\mathbb{Q}$)

La relation $\mathcal{R}_Q$ définie sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ et } \forall (p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \quad (p,q')\mathcal{R}_Q(q,p') \iff p \times q' = q \times p'$$

est une relation d'équivalence.

Définition 1.4

L'ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par $\mathcal{R}_Q$ est noté $\mathbb{Q}$ et est appelé ensemble des nombres rationnels. On note $\frac{p}{q}$ la classe d'équivalence d'un élément (p,q) de $\mathbb{Q}$. L'entier relatif p est appelé le numérateur et q le dénominateur de la fraction.

1.1.2 Relation d'order

Définition 1.5

Soit E un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ de E dans E est dite :

➤ anti-symétrique si : $\forall x, y \in E : (x\mathcal{R}y) \quad \text{et} \quad (y\mathcal{R}x) \implies x = y$

Définition 1.6

Soit E un ensemble non vide. Une relation $\mathcal{R}$ de E dans E est appelée une relation d'ordre sur E si elle est à la fois :

☞ réflexive.

☞ anti-symétrique.

☞ transitive.

Définition 1.7

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Cette relation d'ordre est qualifiée de relation d'ordre total sur E si

$$\forall x, y \in E : (x\mathcal{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathcal{R}x))$$

Exemple 1.3

Pour $E = \mathbb{Q}$, les relations $\leqslant$ et $\geqslant$ sont des relations d'ordre total sur E.

Exemple 1.4

Sur $\mathbb{Q}$ la relation $<$ définie par

$$x < y \iff x - y \in \mathbb{Q}_-^*$$

n'est pas une relation d'ordre.

1.2 Bornes supérieure et inférieure

Définition 1.8

Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ et A un sous-ensemble non vide de E. On dit qu'un élément S de E est un majorant de A si

$$\forall x \in A \quad x \leqslant S$$

Si l'ensemble des majorants est non vide, on dit que l'ensemble A est majoré.

Si un élément $M \in A$ est un majorant de A, alors il est unique et est appelé élément maximal de A. On note $M = \max A$.

Définition 1.9

Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ et A un sous-ensemble non vide de E. On dit qu'un élément s de E est un minorant de A si

$$\forall x \in A \quad s \leqslant x$$

Si l'ensemble des minorants est non vide, on dit que l'ensemble A est minoré.

Si un élément $m \in A$ est un minorant de A, alors il est unique et est appelé élément minimal de A. On note $M = \min A$.

Définition 1.10

Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ et A un sous-ensemble non vide de E.

☞ Si A est majoré, on appelle borne supérieure de A le plus petit élément, s 'il existe, de l'ensemble des majorants. On le note $\sup A$.

☞ Si A est minoré, on appelle borne inférieure de A le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants. On le note $\inf A$

Exemple 1.5

Soit $E = \mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \quad 0 \leqslant x < 2\}$$

L'ensemble des majorants est : $\{x \in \mathbb{Q} \quad |x \geqslant 2\}$. Il possède comme le plus petit élément 2, mais cet élément n'appartient pas à A. Donc l'ensemble A possède donc une borne supérieure mais pas d'élément maximal.

Exemple 1.6

Soit $E = \mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\}$$

L'ensemble des majorants est : $\{x \in \mathbb{Q} \quad |x \geqslant 2\}$. Il possède comme le plus petit élément 2, cet élément appartient pas à A. Donc l'ensemble A possède donc un d'élément maximal qui est bien évidement une borne supérieure.

1.3 Les insuffisances du corps des rationnels

On suppose connues les propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. On désigne par $+$ et $\times$ l'addition et la multiplication entre entiers.

1.3.1 Une première insuffisance de $\mathbb{Q}$

On considère l'équation algébrique qui consiste à :

$$\text{trouver } x \in \mathbb{Q} \quad \text{ tel que } x^2 = 2$$

Si cette équation avait une solution x dans $\mathbb{Q}^+$, alors il existerait $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec p et q sans diviseur commun autre que 1 tels que $x = p/q$ autrement dit tels que $p^2 = 2q^2$. Ceci impliquerait que p^2 est pair et par conséquent que p est pair. Ainsi il existerait un entier naturel k non nul tel que $p = 2k$. On aurait alors $2q^2 = p^2 = 4k^2$ ce qui impliquerait que $q^2 = 2k^2$ et donc q serait pair. Ceci contredirait notre hypothèse que p et q sont sans diviseur commun autre que 1. Par ailleurs si l'équation avait une solution x dans $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^+$ alors le rationnel $-x$ qui appartiendrait à $\mathbb{Q}^+$ serait aussi solution (car $(-x)^2 = x^2$) . On vient de voir que c'est impossible. Ce raisonnement par l'absurde permet de conclure que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

1.3.2 Une deuxième insuffisance

Remarque 1.1

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ non vide et majoré, alors il admet un plus grand élément (ou élément maximal). Cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$ (malgré que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), comme il montre l'exemple suivant.

On considère l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{Q}^*_+ | x^2 < 2\}$$

ne possède ni élément maximal ni borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Pour le vérifier, raisonnons par l'absurde. Soit f l'application de $\mathbb{Q}^*$ dans $\mathbb{Q}^*$ définie par :

$$f(x) = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$$

Alors

$$[f(x)]^2 - 2 = \frac{(x^2-2)^3}{(3x^2+2)^2} < 0, \quad \forall x \in A \tag{1.1}$$

$$f(x) - x = \frac{2x(2-x^2)}{3x^2+2} > 0, \quad \forall x \in A \tag{1.2}$$

➩ Supposons que A possède un élément maximal α. Alors on a forcement

$$\alpha^2 < 2 \quad \text{ car } \alpha \in A$$

D'après la relation (1.1), $\beta = f(\alpha)$ est élément de A ($[f(\alpha)]^2 - 2 < 0$) et d'après la relation (1.2), $\beta > \alpha$ (car $f(\alpha) - \alpha > 0$). On a une contradiction car $\beta \in A$ est strictement supérieur à l'élément maximal α. L'ensemble A ne possède donc pas d'élément maximal.

➫ Supposons maintenant que A possède une borne supérieure α. L'ensemble des majorants de A est :

$$EM(A) = \{x \in \mathbb{Q}^* \quad |x^2 \geqslant 2\}$$

On a donc $\alpha^2 > 2$. D'après la relation (1.1) , $\beta = f(\alpha)$ est élément de $EM(A)$ (car $(f(\alpha))^2) - 2 \leqslant 0$) et d'après la relation (1.2) , $\beta > \alpha$ (car $f(\alpha) - \alpha \geqslant 0$). D'après la définition de la borne supérieure cela implique que $\beta = \alpha$. On déduit de la relation (1.2) que $2 - \alpha^2 = 0$. C'est impossible car nous avons montré que 2 n'est le carré d'aucun rationnel. L'ensemble A ne possède donc pas de borne supérieure. Ainsi, dans $\mathbb{Q}$, un ensemble borné ne possède pas nécessairement de borne supérieure (ou de borne inférieure). Il est donc souhaitable de construire une extension de l'ensemble $\mathbb{Q}$ qui, en plus d'être un corps commutatif totalement ordonné, posséderait la propriété suivante :

Propriété :

Tout sous-ensemble borné possède une borne supérieure et une borne inférieure.

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ répond à ce besoin.

1.3.3 Le corps des réels

Nous admettons l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ et d'une relation d'ordre total qui prolongent celles définies sur Q.

Remarque 1.2

On appelle nombre un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on appelle nombre algébrique un réel qui est solution d'une équation algébrique à coefficients rationnels, c'est-à-dire de la forme :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

avec $a_k \in \mathbb{Q}, k \in \{0, \ldots n\}$. L'ensemble des nombres algébriques contient $\mathbb{Q}$ et est un ensemble dénombrable. Les autres réels sont qualifiés de transcendants. Par exemple $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel et un nombre algébrique (il est solution de l'équation algébrique $x^2 - 2 = 0$) alors que π est un nombre irrationnel et un nombre transcendant.

1.3.4 Propriétés de la borne supérieure

Proposition 1.1

✔ Tout sous-ensemble A non vide et majoré de $\mathbb{R}$; admet une borne supérieure b qui vérifie

$$(\forall x \in A; x \leqslant b) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in A \text{ tel que } b - \varepsilon < x_\varepsilon)$$

✔ Tout sous-ensemble A non vide et minoré de $\mathbb{R}$; admet une borne inférieure a qui vérifie

$$(\forall x \in A; x \geqslant a) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in A \text{ tel que } x_\varepsilon - \varepsilon < a)$$

Théorèm 1.1: (Propriété d'Archimède)

La propriété d' affirme que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \text{tel que } n\varepsilon > x$$

Preuve

Soient ε et x deux réels strictement positifs fixés. Alors l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \quad n\varepsilon \leqslant x\}$$

est un sous-ensemble non vide et majoré par $\frac{x}{\varepsilon}$. Il admet donc une borne supérieure b dans $\mathbb{R}$ (qui est par définition le plus petit des majorants de A). Puisque $b-1$ n'est pas un majorant de A, il exist $\tilde{n} \in E$ tel que $\tilde{n} > b-1$. On en déduit que $\tilde{n}+1 > b$ et par conséquent que l'entier non nul $n_0 = \tilde{n}+1$ n'appartient pas à A. On a donc $n_0 > x$. La propriété d'Archimède est démontrée :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad \text{tel que } n\varepsilon > x$$

1.4 Raisonnement par récurrence

De nombreuses propositions s'expriment sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$$

Une démonstration par permet de montrer qu'une telle proposition est vraie.
La méthodologie consiste à :

1. vérifier que la propriété $P(n_0)$ est vraie

2. puis démontrer que si la propriété $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ supposée vraie est appelée hypothèse de récurrence.

Exemple 1.7

Montrer par récurrence que :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Preuve

Tout d'abord, nous vérifions que la proposition est vraie pour $n=1$. En effet, on a

$$1^2 = \frac{1\times 2\times 3}{6}$$

Maintenant, nous supposons que la propriété est vraie pour n, i.e,

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et nous démontrons que

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Si

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

alors

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

1.5 Formule de binôme de Newton

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout entier p compris entre 0 et n, on définit l'entier noté C_p^n, appelé coefficient binomial (de Newton), de la manière suivante :

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

où, par convention, $0! = 1$.

Proposition 1.2

Le coefficient binomial vérifie les propriétés suivantes :

1. $C_0^n = C_n^n = 1$
2. $C_1^n = n$
3. $C_{n-p}^n = C_p^n$
4. $C_{p-1}^n + C_p^n = C_p^{n+1}$

Proposition 1.3: (Formule du binôme de Newton)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$$

Preuve

Démonstration par récurrence.

Proposition 1.4: (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

L'inégalité de affirme que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

Preuve

On considère l'application :

$$T : \lambda \to \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2$$

Pour tout réel λ, $T(\lambda)$ est positif car il s'agit d'une somme de carrés. De plus,

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda^2 x_i^2 + 2\lambda x_i y_i + y_i^2) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma, \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc on a forcement, un discriminant négatif pour T, i.e,

$$\beta^2 - \alpha\gamma < 0 \iff \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

1.6 La valeur absolue

Définition 1.11

On appelle valeur absolue du réel x le réel positif noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Les principales propriétés de la valeur absolue sont données dans la proposition suivante.

Proposition 1.5

On a les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \max(x, -x)$ et $|-x| = |x|$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (|x| = 0 \iff x = 0)$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| = |x| \times |y|$
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$
5. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$

Définition 1.12

On appelle distance usuelle sur $\mathbb{R}$ l 'application :

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = |y-x| \end{aligned}$$

Étant donnés deux réels x et y, le réel $d(x,y)$ est appelé distance de x à y.

Proposition 1.6

L a distance usuelle sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (d(x,y) = 0 \iff x = y)$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y))$

1.7 Partie entière et racine nième

Proposition 1.7: (Partie entière)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \leqslant x < \alpha + 1$. L'entier relatif α est appelé partie entière du réel x et est noté $E(x)$.

Preuve

On procède par disjonction de cas selon le signe de x.

- Soit x un réel positif et $A = \{n \in \mathbb{Z} \quad | \quad n \leqslant x\}$, L'ensemble A étant un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ non vide et majoré, il admet un plus grand élément (ou élément maximal) α. L'entier a appartient à A, donc on a $\alpha \leqslant x$, et puisqu'il s'agit de l'élément maximal de A on a $\alpha + 1 > x$.
- Considérons à présent un réel x strictement négatif et notons B l'ensemble $B = \{n \in \mathbb{Z} \quad n > x\}$. Cet ensemble est non vide ($0 \in B$) et il est minoré, il admet un unique élément minimal $\beta \in \mathbb{Z}$. Cet élément minimal vérifie d'une part $(\beta \in B)$ donc $(\beta > x)$ et d'autre part $\beta - 1 \notin B$ donc $\beta - 1 \leqslant x$, donc on prend $\alpha = \beta - 1$.

Proposition 1.8: (Racine n-ième d'un réel positif)

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donnés, il existe un unique réel positif b tel que $b^n = a$. Ce réel noté $\sqrt[n]{a}$ et est appelé racine n-ième de a

1.8 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.13

On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x < y \implies \exists a \in A \quad \text{tel que } x < a < y)$$

Proposition 1.9

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

Preuve

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On utilise la propriété d'Archimède en prenant $\varepsilon = y - x$. Alors $\exists n_1$ tel que $n_1(y-x) > 1$. On a donc

$$\begin{aligned} y - x > \frac{1}{n_1} &\implies y > \frac{n_1 x + 1}{n_1} \\ &\implies y > \frac{E(n_1 x) + 1}{n_1} \end{aligned}$$

On pose $a = \dfrac{E(n_1 x) + 1}{n_1}$ il est clair que $a \in \mathbb{Q}$ en utilisant la propriété de la partie entière (voir la proposition 1.7) on obtient :

$$a > \frac{(n_1 x - 1) + 1}{n_1} = x \quad \text{et} \quad a \leqslant \frac{n_1 x + 1}{n_1} = x + \frac{1}{n_1} < y$$

Proposition 1.10

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, il existe une suite $\{x_n\}_n \subset A$ qui converge vers x.

1.9 Topologie de la droite réelle

1.9.1 Intervalles

Définition 1.14

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad (\alpha \in I \text{ et } \beta \in I \text{ et } \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta) \implies \gamma \in I$$

Définition 1.15: (Voisinage)

On dit que le sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un du réel x_0 si $\mathcal{V}$ contient un intervalle ouvert de centre x_0 autrement dit, si

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a < b \quad x_0 = \frac{a+b}{2}, \quad]a,b[\subset \mathcal{V})$$

Exemple 1.8

1. Les intervalles $]-1,1]$ et $[-1,1/2]$ sont des voisinages de 0.
2. Les intervalles $]0,1[$, $[0,1[$ et $]1,2[$ ne sont pas des voisinages de 0.
3. L'ensemble $\{1\}\cup]2,3[$ n'est pas un voisinage de 1 mais c'est un voisinage de $5/2$.

Définition 1.16

- ☞ Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ non vide de $\mathbb{R}$ est qualifié d 'ensemble ouvert si pour tout élément x de il existe un intervalle ouvert de centre x inclus dans $\mathcal{O}$, autrement dit, un sous-ensemble $\mathcal{O}$ est ouvert s 'il est voisinage de chacun de ses points.
- ☞ Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ est appelé ensemble fermé si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.

Remarque 1.3

- ☛ Par convention, l'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{R}$ Son complémentaire qui est $\mathbb{R}$ est donc un fermé. Nous avons vu que $\mathbb{R}$ est un ensemble ouvert ; son complémentaire qui est l'ensemble vide est donc un fermé. On retiendra que l'ensemble vide et $\mathbb{R}$ sont à la fois des ouverts et des fermés. Ce sont les seuls à posséder cette propriété.
- ☛ Un ensemble peut n'être ni ouvert ni fermé (c'est le cas par exemple de l'intervalle $]-3,3]$ ou de $\mathbb{Q}$). Contrairement à son sens dans le langage courant, fermé n'est pas le contraire d'ouvert.
- ☛ Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est fermé et borné est un ensemble compact.

1.9.2 Intérieur et adhérence d'un ensemble

Définition 1.17

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel. On dit que x_0 est un point intérieur à A si A est un voisinage de x_0. L 'ensemble $\mathcal{O}$ des points intérieurs à A est noté $\overset{o}{A}$ et est appelé intérieur de A.

Définition 1.18: (Adhérence)

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel.

- ☞ On dit que x_0 est un point adhérent à A si tout intervalle ouvert de centre x_0 contient au moins un élément de A. L 'ensemble des points adhérents à A est noté A et est appelé adhérence de A.
- ☞ On dit que x_0 est un point d ' accumulation de A s i tout intervalle ouvert de centre x_0 contient au moins un élément de A autre que x_0.

Exemple 1.9

$A =]1,2[\cup\{3\}$.

- ☛ Le réel 1 est un point d'accumulation de A et un point adhérent de A. Le réel 1 n'appartient pas à A.
- ☛ Le réel 2 est un point d'accumulation de A et un point adhérent de A. Le réel 2 appartient à A.
- ☛ Le réel 3 est un point adhérent mais n'est pas un point d'accumulation. Le réel 3 appartient à A. Le réel $3/2$ est un point d'accumulation de A et un point adhérent de A. Il appartient à A.

1.10 Exercices

1.10.1 Exercices (TD)

Exercice 1.1

Soient n un entier non nul et p, q deux éléments de $\mathbb{Z}$. On dit que p est congru à q modulo n et on note $p \equiv q[n]$ si

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad p - q = k \times n$$

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$p\mathcal{R}q \iff p \equiv q[n]$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1.2

Trouver un example d'une relation d'ordre qui n'est pas totale.

Exercice 1.3

Soient $E = \mathbb{Q}$ et $A = \{x \in \mathbb{Q} \quad | \quad 0 \leqslant x \text{ et } x \leqslant 2\}$.

1. Déterminer l'ensemble des majorants.

2. Déterminer la borne supérieure.

3. y-a-t-il un élément maximal de l'ensemble A ?

Mêmes questions pour $E = \mathbb{Q}$ et $B = \{x \in \mathbb{Q} \quad | \quad 0 \leqslant x \text{ et } x < 2\}$.

Exercice 1.4

Considérons l'ensemble $E = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \quad | \quad x \in \mathbb{R}_+^*, x \leqslant 1 \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ mais n'admet pas un élément maximal.

2. Déterminer les bornes supérieure et inférieure.

Exercice 1.5

En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer les relations suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} (k! \times k) = (n+1)! - 1$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 2\sqrt{n}$$

Exercice 1.6

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier naturel. Pour tout $k = 0, \ldots, n$, on note $C_k^n = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ les coefficients binomiaux.

1. a. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n = 0$$

b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \geqslant 2$$

2. Déduire de ce qui précède que :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

Exercice 1.7

En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$$

On peut illustrer avec MAPLE la propriété proposée.

```
> N  : = 40 : # les deux points : pour ne pas afficher le r\'{e}sultat
> E1 : = [ [n, n^(1/n)] $n= 1.. N ] :
> E2 : = [ [n, 1+sqrt(2/n)] $n= 1.. N ] :
> plot ( [E1, E2] , style=point , symbol= [cross , diamond] ) ; # ; pour afficher le r\'{e}sultat
```

Exercice 1.8

Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $x + |x-1| = 1 + |x|$

b) $|x-2| + |x-1| < 3$

c) $2x^2 + |x-1| = |x+1|$

d) $x^2 + |x-1| - |2x+1| < 0$

Exercice 1.9

Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) $|x+2y+1| + |2x+y+1| > 0$

b) $|x^2+2y-3| + |x+y| > 0$

c) $|y - \sin(x)| + |y^n - x^n| = 0$

Exercice 1.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que $3+\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.
2. Montrer que $(3-\sqrt{5})^n \in (0,1)$.
3. Montrer que $(3-\sqrt{5})^n+(3+\sqrt{5})^n$ est un entier naturel pair.
4. En déduire la partie entière de $(3+\sqrt{5})^n$.

Exercice 1.11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n, l'ensemble $\left\{\dfrac{1}{t+2n}+\dfrac{1}{2^n} \quad | \quad t \in \mathbb{R}^*\right\}$.

1. a. Déterminer la borne inférieure a_n et la borne supérieure b_n de A_n.
   b. Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble A_n est un intervalle.
2. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_{n+1} < a_n \leqslant b_{n+1} < b_n$
   b. En déduire que l'ensemble $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ est l'intervalle $]0,1[$.

1.10.2 Exercices supplémentaires

Exercice 1.12

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Indication

1. Pour la transitivité on pourra calculer xye^z.
2. Poser la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t}$, après une étude de fonction on calculera le nombre d'antécédents possibles.

Exercice 1.13

Soit $(E,\leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$X\mathcal{R}Y \iff (X=Y \text{ ou } \forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y).$$

1. Vérifierque c'est une relation d'ordre.

Exercice 1.14

1. Pour tout couple de nombres réels (x,y) montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la relation
$$x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

Chapitre 2

Le corps des nombres complexes

2.1 Notations et conventions

2.2 Introduction

$(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps [1]. Pour $n>1$, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, mais on ne peut pas définir une multiplication sur $\mathbb{R}^n$ (tel que chaque élément non nul admet un inverse). Nous pouvons munir $\mathbb{R}^2$ par une multiplication définie par

$$(a,b)*(c,d) = (ac-bd, bc+ad).$$

par cette définition $(\mathbb{R}^2,+,*)$ devient un corps, noté $\mathbb{C}$. On Note que $(a/(a^2+b^2), -b/(a^2+b^2))$ est l'inverse multiplicatif de (a,b).

Remarque 2.1

On ne peut pas munir $\mathbb{R}^n$ d'une structure de corps pour $n>2$.

On note $(0,1)$ par i et on identifie $x\in\mathbb{R}$ avec $(x,0)$, donc $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ et $(a,b)=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. On note aussi que $i^2=-1$. $\mathbb{C}$ est généré en ajoutant i à $\mathbb{R}$. Il faudrait noté que l'addition de i nous permet non seulement à résoudre l'équation $x^2+1=0$, mais toute équation polynomiale.

Pour a et b réels et $z=a+bi$ on définit

$$\Re z = a, \quad \Im z = b, \quad \bar{z} = a-bi, \quad |z| = (a^2+b^2)^{1/2}.$$

2.3 Opérations algébriques sur les nombres complexes

Proposition 2.1

$$\Re z = (z+\bar{z})/2, \qquad \Im z = (z-\bar{z})/(2i), \tag{2.1}$$

$$|z|^2 = z\bar{z}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \tag{2.2}$$

$$\overline{z\pm w} = \bar{z}\pm\bar{w}, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \tag{2.3}$$

$$\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}, \qquad |z+w| \leqslant |z|+|w|. \tag{2.4}$$

1. Tout élément de $\mathbb{R}$, distinct de l 'élément zéro, admet un inverse pour la seconde loi $\times$

2.4 Module et argument d'un nombre complexe

2.4.1 Module d'un nombre complexe

Le produit d'un nombre complexe z et de son conjugué $\bar{z}$ est un nombre réel positif ou nul puisque

$$z \times \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$$

2.5 Représentation géométrique d'un nombre complexe

2.5.1 Argument d'un nombre complexe

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe non nul, avec x et y réels. On a alors :

$$\begin{aligned} z =&(x^2+y^2)^{1/2} \times \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} i\right) \\ =&|z|(\alpha+i\beta) \quad \text{avec} \quad \alpha^2+\beta^2 = 1 \end{aligned}$$

Définition 2.1

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe non nul avec x et y réels. On appelle argument de z et on note $Arg(z)$, tout nombre réel θ vérifiant :

$$\cos\theta = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

On appelle argument principal l'unique θ appartenant à $]-\pi, \pi]$.

Exemple 2.1

$$Arg(1) = 0[2\pi], \quad Arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$Arg(-1) = \pi[2\pi], \quad Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

2.5.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

On peut alors écrire tout nombre complexe z non nul sous la forme suivante appelée écriture trigonométrique ou forme trigonométrique

$$z = |z|\left[\cos(Arg(z)) + i\sin(Arg(z))\right]$$

Proposition 2.2

On a les propriétés suivantes :

- ☞ $\forall z \in \mathbb{C}^*$ $\quad Arg(\bar{z}) \equiv -Arg(z)[2\pi]$
- ☞ $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ $\quad Arg(z \times z') \equiv Arg(z) + Arg(z')[2\pi]$
- ☞ $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ $\quad Arg(z/z') \equiv Arg(z) - Arg(z')[2\pi]$
- ☞ $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}^*$ $\quad Arg(z^n) \equiv n \times Arg(z)[2\pi]$

Preuve

Pour la première il suffit de rappeler que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$. Vérifions maintenant la deuxième propriété. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$\begin{aligned} z \times z' &= |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))|z'|(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= |z||z'|\left[\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta'))\right] \\ &= |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

Pour la troisième propriété, on utilise le fait que, $z/z' = z\bar{z'}$ et la deux premières propriétés. La dernière propriété se démontre en utilisant la deuxième.

2.5.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Il est pratique d'utiliser pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ la notation exponentielle complex :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Tout nombre complexe z non nul peut alors s'écrire sous la forme suivante appelée écriture polaire ou encore forme polaire :

$$z = |z|e^{iArg(z)}, \quad \text{avec}|z| \in \mathbb{R} \text{ et } Arg(z) \in \mathbb{R}$$

Proposition 2.3

- ☞ $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- ☞ $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |e^{i\theta}| = 1, \quad Arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi], \quad (e^{\bar{i\theta}}) = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
- ☞ $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i\theta + \theta'}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta - \theta'}$

Preuve

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}{2} = \cos(\theta)$$

Corollaire 2.1: (Formule de Moivre)

La formule de $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Preuve

En utilisant la notation exponentielle, on doit donc montrer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Supposons d'abord $n \in \mathbb{N}$. La démonstration s'effectue par récurrence sur n. La propriété est immédiate au rang 0 puisque nous avons, $(e^{i\theta})^0 = e^{i0\theta} = 1$.
Supposons que l'on ait

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

et montrons que

$$(e^{i\theta})^{(n+1)} = e^{i(n+1)\theta}$$

En effet,

$$\begin{aligned}(e^{i\theta})^{(n+1)} &= (e^{i\theta})^n e^{i\theta}\\ &= e^{in\theta}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\\ &= e^{i(n\theta+\theta)}\end{aligned}$$

2.6 Racines d'un nombre complexe

2.6.1 Racines deuxièmes d'un nombre complexe

Définition 2.2

Soient a et b deux réels. On appelle racine deuxième du nombre complexe $a+ib$ tout nombre complexe z vérifiant :

$$z^2 = a + ib$$

Il est claire que si $a = b = 0$, alors l'unique racine deuxième de 0 est 0. Supposons maintenant que $(a,b) \neq (0,0)$ alors on pose $z = x + iy$ donc notre objectif est de chercher x et y réels tels que

$$(x+iy)^2 = a + ib, \quad a, b \text{ sont données}$$

$$(x+iy)^2 = a + ib \iff x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \iff x^2 - y^2 = a \text{ et } 2xy = b$$

En considérant le module, on peut aussi écrire

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

donc on obtient le système de trois équations :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ \quad 2xy = b \end{cases} \tag{2.5}$$

On déduit facilement de la première égalité et de la troisième égalité :

$$x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+b^2}) \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2+b^2})$$

Posons :

$$\alpha = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+b^2}) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2+b^2})$$

Les deux nombres α et β sont positifs. Donc

$$x = \pm\alpha \quad \text{et} \quad y = \pm\beta$$

Il y a donc quatre possibilité de z :

$$z_1 = \alpha + i\beta, \quad z_2 = \alpha - i\beta, \quad z_3 = -\alpha + i\beta, \quad z_4 = -\alpha - i\beta$$

Si $b > 0$, alors les solutions sont :

$$z_1 = \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad z_2 = -\alpha - i\beta$$

Si $b < 0$, alors les solutions sont :

$$z_1 = \alpha - i\beta \quad \text{et} \quad z_2 = -\alpha + i\beta$$

Proposition 2.4

Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines deuxièmes distinctes et opposées l'une de l'autre.

Exemple 2.2

Trouver les racines deuxièmes de $-3-4i$. En identifiant les parties réelles et complexes dans

$$(x+iy)^2 = -3-4i$$

et en considérant les modules, on obtient le système de trois équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ \quad 2xy = -4 \end{cases} \tag{2.6}$$

Alors les deux racines deuxièmes sont :

$$z_1 = 1 - 2i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 + 2i$$

2.7 Calcul algébrique des racines d'un trinôme

On s'intéresse à présent à la résolution de l'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{2.7}$$

d'inconnu $z \in \mathbb{C}$, a, b et c sont des complexes fixés, avec $a \neq 0$. Toute solution sera qualifiée de racine du trinôme $az^2 + bz + c = 0$. On commence par écrire le trinôme sous forme canonique :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On l'appelle le discriminant du trinôme (c'est un nombre complexe).
On pose $Z = z + \dfrac{b}{2a}$, alors (2.7) s'écrit :

$$a\left(Z^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0$$

Donc la résolution l'équation (2.7) dans $\mathbb{C}$ se ramène à ainsi au calcul des racines deuxième du nombre complexe $\dfrac{\Delta}{4a^2}$. On en déduit alors les deux solutions de (2.7). Ce sont les deux complexes

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{où } \delta^2 = \Delta$$

Exemple 2.3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0$$

Le discriminant de l'équation $z^2 - 3z + 3 + i = 0$ est le nombre complexe

$$\Delta = -3 - 4i \quad \text{et} \quad \delta = 1 - 2i$$

alors les deux solutions sont :

$$z_1 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - i$$

2.8 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 2.3

Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ième du nombre complexe $a+ib$ tout nombre complexe z vérifiant :

$$z^n = a + ib$$

Proposition 2.5

Tout nombre complexe Z non nul possède exactement n racines n-ièmes. Elles sont distinctes deux à deux et s 'écrivent :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

où $\rho = |Z|$ et $\theta = Arg(Z)$. Si $n \geqslant 2$, alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

2.9 Exercices

2.9.1 Exercices TD

Exercice 2.1

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. On considère le nombre complexe

$$z = 2\sin^2(\theta) + i\sin(2\theta)$$

1. Déterminer le module et un argument (lorsqu'il existe) du complexe z en distinguant selon les valeurs de θ.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Trouver le module et un argument du nombre complexe
$$z = 1 - i\tan(\theta)$$

Exercice 2.2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a)
$$z^2 + z - (1+3i) = 0$$

b)
$$(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$$

c)
$$z^2 - 2ze^{i\theta} + 1 = 0 \text{ où } \theta \in [0, 2\pi]$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a)
$$z^4 = -7 - 24i$$

b)
$$z^6 = (1-i)/(\sqrt{3}+i)$$

c)
$$z^4 + (3-4i)z^2 - 12i = 0$$

d)
$$(z+i)^n + (z-1)^n = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 2.3

Vérifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$
$$\sin(5\theta) = 16\sin^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\sin\theta$$

Exercice 2.4

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

1. Soient z et z' deux complexes différents de 1. Montrer l'équivalence

$$f(z) = f(z') \iff (z = z' \text{ où } zz' = 1)$$

   L'application f est-elle injective ?

2. Soit $u \in \mathbb{C}$. Discuter (selon les valeurs de u) le nombre des solutions de l'équation :

$$f(z) = u$$

   L'application f est-elle surjective ?

3. Montrer que si $|z| = 1$ et $z \neq 1$ alors $f(z) \in \mathbb{R}$.

2.9.2 Exercices supplémentaires

Exercice 2.5

Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2.6

Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 2.7

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Exercice 2.8

Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84) + i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5))(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60) + i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Exercice 2.9

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 2.10

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta}+e^{2i\theta}.$$

Exercice 2.11

Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Exercice 2.12

Mettre sous forme trigonométrique $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi,\pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 2.13

Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 2.14

Trouver les racines carrées de $3-4i$ et de $24-10i$.

Exercice 2.15

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 2.16

Montrer que les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 2.17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0 \; ; \; z^2-(3+4i)z-1+5i=0 \; ; \; 4z^2-2z+1=0 \; ;$$
$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 2.18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - (11 - 5i)z + 24 - 27i = 0$.

2. $z^3 + 3z - 2i = 0$.

Chapitre 3

Suites de nombres réels

Définition 3.1

Une suite numérique de nombres réels est une application d'un sous ensemble infini $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ au lieu de la noter :

$$\begin{aligned} u : \mathcal{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

on la note $u := (u_n)_{n\in\mathcal{N}}$

Exemple 3.1

$$u_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*, \ldots$$

3.1 Suites convergentes de nombres réels

Définition 3.2

Soit (u_n) une suite de nombre réels.

- On dit que la suite (u_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \quad u_n \leqslant M$$

- On dit que la suite (u_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \quad u_n \geqslant m$$

- On dit que la suite (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \quad |u_n| \leqslant K$$

Définition 3.3

Soit (u_n) une suite de nombre réels. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } (n \geqslant N) \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On dit aussi que (u_n) est convergente . Dans le cas contraire on dit que la suite est divergente .

Exemple 3.2

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0. En effet,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = E(1/\varepsilon) + 1, \quad n \geqslant N \implies |u_n| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 3.3

✔ On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

✔ La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.

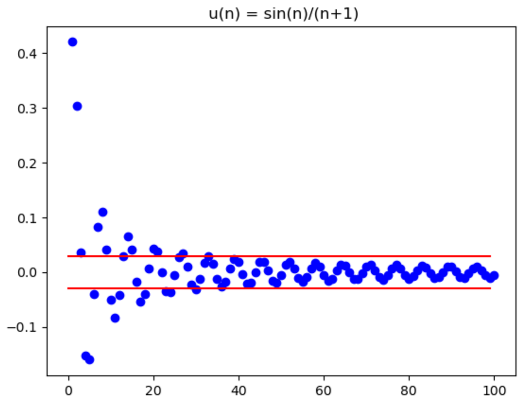

Fig. 3.1 Représentation graphique de la suite $u_n = \sin(n)/(n+1)$, $\varepsilon = 0.03$, $\ell = 0$

Proposition 3.1

Si une suite est convergente, la limite de cette suite est unique.

Preuve

Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)_n$ converge et qu'elle a deux limites ℓ_1 et ℓ_2. Posons $\varepsilon = \frac{1}{4}|\ell_1 - \ell_2|$,

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1 \implies |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_2 \implies |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$:

$$n \geqslant N \implies |\ell_1 - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leqslant \frac{2}{4}\varepsilon$$

donc $0 < \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iff 1 \leqslant \frac{1}{2}$, contradiction.

3.1.1 Suites bornées

Définition 3.4

Une suite numérique $(u_n)_n$ est dite bornée s'il existe un réel positif M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leqslant M$.

Exemple 3.4

La suite $(u_n)_n$ de terme général $U_n = \sin(n)$ est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \leqslant 1$.

Définition 3.5

- ☛ Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite majorée s'il existe un réel A tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leqslant A$. Ce réel A est appelé un majorant de la suite $(u_n)_n$.
- ☛ Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite minorée s'il existe un réel B tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \geqslant B$. Ce réel B est appelé un minorant de la suite $(u_n)_n$.

Remarque 3.1

On rappelle que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné mais que ce n'est pas le cas de $\mathbb{C}$. La notion de suite minorée ou majorée n'a donc de sens que pour les suites réelles.

Proposition 3.2

Toute suite numérique convergente est bornée.

Preuve

Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Pour $\varepsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que pour } n \geqslant N \quad (|u_n - \ell| < 1) \implies |u_n| \leqslant \ell + 1$$

Théorèm 3.1: (Théorème d'encadrement)

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles vérifiant :

$$\exists N, \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

- ☛ Si les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent respectivement vers ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 alors $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ell_3$
- ☛ Si les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ.

Exemple 3.5

Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$. Compte tenu du fait que la fonction sinus est majorée par 1 et minorée par - 1 , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

3.2 Monotonie

3.2.1 Suite réelles monotones

Définition 3.6

- ☞ On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ est croissante si : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- ☞ On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ est strictement croissante si : $u_{n+1} > u_n$.
- ☞ On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ est décroissante si : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- ☞ On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ est strictement décroissante si : $u_{n+1} < u_n$.
- ☞ On dit qu'une suite réelle est monotone si elle est croissante ou décroissante. On dit qu'une suite réelle est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 3.6

- La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est croissante. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} > 0 \end{aligned}$$

- La suite de terme général $u_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est décroissante. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \ln(\frac{n}{n+1}) + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(\frac{x}{x+1})$$

est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ donc f est nécessairement à valeurs strictement négatives sur $[0, \infty[$ on déduit que u_n est décroissante.

Remarque 3.2

1. Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n$.
2. Il résulte de manière directe de la définition que si la suite $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante) alors la suite de terme général $(-u_n)_n$ est une suite décroissante (resp. croissante).
3. Rappelons que le corps $\mathbb{C}$ n'étant pas muni de relation d'ordre, la notion de suite monotone ne peut pas avoir de sens pour une suite complexe.

Théorèm 3.2

- ☛ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ☛ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Preuve

- Soit $(u_n)_n$ une suite croissante et majorée par un réel M. L'ensemble $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée (par M) de $\mathbb{R}$. Donc il admet une borne supérieure ℓ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \ell \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_N \geqslant \ell - \varepsilon$$

Par ailleurs, comme la suite $(u_n)_n$ est croissante, pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \geqslant u_N$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\ell \geqslant u_n \geqslant u_N \geqslant \ell - \varepsilon$$

Ainsi, pour tout réel strictement positif ε il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait

$$|u_n - \ell| < \varepsilon$$

- Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante et minorée par un réel m. L'ensemble $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et minorée (par m) de $\mathbb{R}$. Donc il admet une borne inférieure ℓ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant \ell \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_N \leqslant \ell + \varepsilon$$

Par ailleurs, comme la suite $(u_n)_n$ est décroissante, pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \leqslant u_N$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad n \geqslant N$

$$\ell \leqslant u_n \leqslant u_N \leqslant \ell + \varepsilon$$

Ainsi, pour tout réel strictement positif ε il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait

$$|u_n - \ell| < \varepsilon$$

Exemple 3.7

Considérons la suite de terme général $u_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors u_n est décroissante et minorée. En effet,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

mais

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$$

donc

$$0 \leqslant -\ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n$$

3.2.2 Suites adjacentes

Définition 3.7

Deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. l'une des deux suites est croissante et l'autre est décroissante.
2. $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Exemple 3.8

La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante. La suite $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ est décroissante. De plus

$$\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$$

donc u_n et v_n sont adjacentes.

Illustrons graphiquement cet exemple avec MAPLE.

```
> N  : = 40 : # les deux points : pour ne pas afficher le r\'{e}sultat
> un : = -> sum(1/k^{2}, k=1..n):
> vn : =  -> un(n)+1/n:
> plot ( [[[ n,un(n)] \$ n=1..20], [[n,vn(n)] \$ n=1..20]] , style=point ) ;
```

Théorèm 3.3

Si deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite.

Preuve

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes telles que la suite $(u_n)_n$ est croissante et la suite $(v_n)_n$ est décroissante. Considérons la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$. En utilisant le fait que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont monotones, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n \\ &= (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

donc w_n est décroissante. Par ailleurs, puisque les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes on a $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$ et la suite $(w_n)_n$ converge vers 0. Les termes de la suite $(w_n)_n$ sont donc nécessairement positifs. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant v_n$. En utilisant par ailleurs la monotonie des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, on obtient

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$$

Puisque la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée (par exemple par v_0), elle converge vers un réel ℓ_1. Puisque la suite $(v_n)_n$ est décroissante et minorée (par exemple par u_0),elle converge vers un réel ℓ_2. Mais $\ell_1 - \ell_2 = 0 \implies \ell_1 = \ell_2$

3.3 Suites extraites

Définition 3.8

La suite numérique $(v_n)_n$ est une ou une sous-suite de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une application φ de N dans N strictement croissante, appelée extractrice, telle que :

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

Exemple 3.9

1. L'application $\varphi : n \mapsto 2n$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{2n}$ est appelée suite des termes pairs extraite de la suite $(u_n)_n$.
2. L'application $\varphi : n \mapsto 2n+1$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{2n+1}$ est appelée suite des termes impairs extraite de la suite $(u_n)_n$.

Proposition 3.3

Si la suite numérique $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors toute sous-suite de la suite $(u_n)_n$ converge également vers ℓ.

Preuve

Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ ; d'après la définition 3.3

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } (n \geqslant N) \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Considérons une suite extraite $v_n = u_{\varphi(n)}$ et montrons qu'elle converge vers ℓ. En effet, l'application φ est croissante donc $\forall n \geqslant N$ on a $\varphi(n) \geqslant \varphi(N)$ donc on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K = \varphi(N), \quad \text{tel que} \quad k \geqslant K \quad |v_k - \ell| < \varepsilon$$

Définition 3.9

On appellevaleur d'adhérence d'une suite numérique tout scalaire qui est limite d'une sous-suite de cette suite.

Exemple 3.10

1. La suite de terme général $\sqrt{2n+1}$ tend vers ∞ car il s'agit d'une suite extraite de la suite de terme général $\sqrt{n}$ qui tend vers ∞.
2. La suite de terme général $\cos(n\pi)$ est divergente, car les suites extraites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ ne convergent pas vers la même limite

Proposition 3.4

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite numérique $(u_n)_n$ converge est que la sous-suite des termes d'indice pair et la sous-suite des termes d'indice impair admettent la même limite. Dans ce cas, cette limite commune est la limite de la suite $(u_n)_n$.

Preuve

D'après la proposition 3.4, si la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors la sous-suite des termes d'indice pair et la sous-suite des termes d'indice impair convergent toutes les deux vers ℓ.
Réciproquement, supposons que la sous-suite des termes d'indice pair et la sous-suite des termes d'indice impair convergent vers une même limite ℓ. D 'après la définition 3.3, pour tout réel ε strictement positif,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } (n \geqslant N_1) \implies |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } (n \geqslant N_2) \implies |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $N = \max(2N_1 + 1, 2N_2)$, alors

$$\text{pour tout } (n \geqslant N) \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Théorèm 3.4: (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite numérique bornée on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$.

Preuve

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée, on construit deux suites adjacentes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ et une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$. Alors on a :

$$\begin{cases} a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n \quad \forall n \\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad \forall n \\ \lim(a_n - b_n) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ qui vérifie

$$\{\ell\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura $|u_{\varphi(n)} - \ell| < b_n - a_n$ et on utilise le fait que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ on pourra conclure que

$$\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

3.4 Suite de Cauchy

Définition 3.10

La suite numérique $(u_n)_n$ est appelée dans $\mathbb{R}$ si elle vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} :$$
$$(n \geqslant N \quad \text{et} \quad m \geqslant N) \implies |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 3.11

La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ est une suite de Cauchy. En effet, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ et $n \geqslant m$ on a

$$|u_n - u_m| = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| = \left|\frac{(n+m)(n-m)}{n^2m^2}\right|$$

Comme

$$0 \leqslant n-m \leqslant n \quad \text{et} \quad n+m \leqslant 2n$$

on obtient :

$$|u_n - u_m| \leqslant \frac{2}{m^2}$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif et $N = E\left(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right) + 1$, alors, pour $n \geqslant m \geqslant N$ on a

$$|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$$

Théorèm 3.5

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite numérique réelle soit une suite de Cauchy est qu'elle converge.

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ (et montrons qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. Remarquons tout d'abord que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ on obtient en utilisant la première inégalité triangulaire

$$|u_n - u_m| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell - u_m|$$

Puisque la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ

$$\exists N \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad (k \geqslant N) \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

donc pour $n \geqslant N$ et $m \geqslant N$ on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2 \qquad |u_m - \ell| \leqslant \varepsilon/2$$

On déduit que

$$|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_n)_n$ est donc une suite de Cauchy.
($\Leftarrow$) Supposons que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy d'après la définition 3.10 on a pour $\varepsilon = 1$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad (\forall n \geqslant N) \quad |u_n - u_N| < 1$$

cela signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, 1 + |u_N|)$$

donc $(u_n)_n$ est bornée. D'après le théorème 3.4 la suite $(u_n)_n$ possède une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergente.

Exemple 3.12

Pour démontrer que la suite $(u_n)_n$ de terme général $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ est divergente, il suffit de démontrer qu'elle n'est pas de Cauchy. Il s'agit pour cela d'établir l'assertion

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N} :& \\ ((n \geqslant N) \text{ et } (m \geqslant N)) \text{ et } |u_n - u_m| > \varepsilon&\end{aligned} \tag{3.2}$$

Étant donné $N \in \mathbb{N}$, considérons les entiers $n = 2^N$ et $m = 2^{N+1}$

$$u_m - u_n = \sum_{2^N+1}^{2^{N+1}} 1/k \geqslant (2^{N+1} - 2^N)\frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2}$$

On a donc montré l'assertion (3.2) avec $\varepsilon = 1/2$. La suite $(u_n)_n$ n'est donc pas une suite de Cauchy et d'après le théorème 3.5 elle ne converge pas.

Remarque 3.3

On prendra garde que la condition $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$ n'est pas suffisante pour conclure que la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy. On pourra s'en convaincre en considérant la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ pour laquelle

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ mais la suite $(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

3.5 Limite supérieure et limite inférieure

Définition 3.11

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On considère les suites $(\overline{S}_n)_n$ et $(\underline{S}_n)_n$ définies à partir de la suite $(u_n)_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{S}_n = \sup_{k\geqslant n}\{u_k\} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \underline{S}_n = \inf_{k\geqslant n}\{u_k\}$$

- ✔ Si la suite $\overline{S}_n$ converge vers une limite $\overline{S}$, cette limite est appelée limite supérieure de la suite $(u_n)_n$ et on écrit
$$\overline{S} = \limsup u_n$$
- ✔ Si la suite $\underline{S}_n$ converge vers une limite $\underline{S}$ cette limite est appelée limite inférieure de la suite $(u_n)_n$, et on écrit
$$\underline{S} = \liminf u_n$$

Exemple 3.13

Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{S}_n = \sup_{k\geqslant n}\{u_k\} = 1 \quad \text{et donc } \limsup u_n = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underline{S}_n = \inf_{k\geqslant n}\{u_k\} = -1 \quad \text{et donc } \liminf u_n = -1$$

Proposition 3.5

La suite $(u_n)_n$ est convergente vers la limite ℓ si et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell$.

Preuve

✔ $(\Rightarrow)$ Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell$, on a pour tout n

$$\overline{S}_n = \sup_{k \geqslant n}\{u_k\} \geqslant u_n \geqslant \inf_{k \geqslant n}\{u_k\} = \underline{S}_n$$

par passage à limite on obtient :

$$\ell \geqslant \lim_{n\to\infty} u_n \geqslant \ell$$

donc d'après le théorème d'encadrement 3.1 on obtient $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

✔ $(\Leftarrow)$ Réciproquement, si $(u_n)_n$ est une suite convergente, alors pour tout réel strictement positif ε il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait

$$|u_n - \ell| < \varepsilon$$

Soit $n \geqslant N$ et $k \geqslant n$ donc on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon \implies \sup_{k \geqslant n}(\ell - \varepsilon) \leqslant \sup_{k \geqslant n}\{u_k\} \leqslant \sup_{k \geqslant n}(\ell + \varepsilon)$$

par conséquent,

$$\ell - \varepsilon \leqslant \overline{S}_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

De la même manière, on a pour $n \geqslant N$ et $k \geqslant n$, on a

$$\inf\{u_k\} \geqslant \ell - \varepsilon \quad \text{et} \quad u_k \leqslant \ell + \varepsilon \implies \inf u_k \leqslant \inf(\ell + \varepsilon) = \ell + \varepsilon$$

par conséquent,

$$\ell - \varepsilon \leqslant \underline{S}_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Proposition 3.6

Soit (u_n) une suite bornée de nombres réels. Pour tout entier n :

1. $\overline{S}_n$ est décroissante minorée donc convergente vers l.
2. $\underline{S}_n$. est croissante majorée donc convergente vers L.
3. On a toujours $l \leqslant L$ et tout point d'accumulation a de la suite u_n vérifier l'inégalité

$$l \leqslant a \leqslant L$$

4. La suite (u_n) converge si et seulement si $l = L$ et la limite de (u_n) est alors égale à cette valeur commune.

3.6 Exercices

3.6.1 Exercices (TD)

Exercice 3.1

On considère la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et la suite $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que u_n est croissante et que v_n est décroissante.
2. Montrer que u_n et v_n sont adjacentes.

Exercice 3.2

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge en montrant que cette suite n'est pas une suite de Cauchy.
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n|$.
3. Conclure !

Exercice 3.3

Utiliser la relation de récurrence :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5} \quad n \geqslant 1$$

pour déterminer la forme générale de la suite $u_n = f(n)$ et calculer le 20 ième terme de cette suite.
Indication maple : Utiliser la command **rsolve**.

Exercice 3.4

Soit α un réel strictement supérieur à 1 et p un entier naturel tel que

$$(p-1)^2 \leqslant \alpha \leqslant p^2$$

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = p$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\alpha}{u_n}\right)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$u_n \geqslant \sqrt{\alpha}$$
2. Déterminer le sens de variation de la suite u_n puis justifier que la suite u_n converge.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$u_n - \sqrt{\alpha} \leqslant \frac{1}{(2\sqrt{\alpha})^{2^n - 1}}$$
4. Calculer la limite de u_n

3.6.2 Exercices supplémentaires

Exercice 3.5

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

est divergente.

Indication

Vous pouvez utiliser le résultat du cours suivant : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ alors toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ.

Exercice 3.6

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Indication

1. Récurrence : calculer $x_{n+1} - 3$.
2. Calculer $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Récurrence.

Exercice 3.7

Soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que $\forall n > 0 \ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

Indication

1. Montrer :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. Pour chacune des majoration il s'agit de faire la somme de l'inégalité précédente et de s'apercevoir que d'un coté on calcule H_n et de l'autre les termes s'éliminent presque tous deux à deux.
3. La limite est $+\infty$.
4. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
5. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 3.8

Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \dfrac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite u_n n'a pas de limite.

Exercice 3.9

Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution a_n dans $[0,1]$.

2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.

3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 3.10

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0,1/2[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0,1/2]$.

3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.

4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leqslant x_n < 1/2$ pour tout $n \geqslant 0$.

5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers α.

Exercice 3.11

Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$u_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2}).$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.12

On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exercice 3.13

Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$, supposée continue et monotone, et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a,b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

2. Application :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$

3. On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.

4. Application :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$

Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Exercice 3.14

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer les inégalités suivantes $(b \geqslant a > 0)$:

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

a. Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que (v_n) est une suite décroissante.

c. Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 3.15

Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$, supposée continue et monotone, et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a,b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

2. Application :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$

3. On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.

4. Application :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$

Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Indication

Pour la première question et la monotonie il faut raisonner par récurrence. Pour la troisième question, remarquer que si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante et appliquer la première question.

Exercice 3.16

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

a. Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que (v_n) est une suite décroissante.

c. Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 3.17

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{-u_n - 3}$$

et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_{n+} = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$$

1. Calculer u_1 et u_2

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2, u_n < -1$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ u_n est décroissante.

4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Exprimer v_n en fonction de n.

6. En déduire $u_n$en fonction de n et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite

Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

Dans ce chapitre, nous rappelons les fonctions nécessaires pour l'analyse. Nous définissons des fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques, exponentielles et logarithmiques. Nous examinons comment évaluer ces fonctions et nous montrons les propriétés de leurs graphiques. Nous fournissons des exemples d'équations avec des termes impliquant ces fonctions et illustrons les techniques algébriques nécessaires pour les résoudre. En bref, ce chapitre fournit les bases du matériel à venir.

4.1 Généralités

4.1.1 Fonction ou Application ?

Définition 4.1

Soient E et F deux ensembles. Une relation d'ensemble de départ E et d'ensemble d'arrivée F est appelée une fonction de E dans F si tout élément de E est en relation avec **au plus** un élément de F.

Exemple 4.1

$E = F = \mathbb{R}$ la relation f qui à chaque x associé $1/x$ est une fonction en note $f(x) = 1/x$. Tout élément de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est en relation avec un élément de $\mathbb{R}$ et le zéro n'est pas en relation avec aucun élément.

Définition 4.2

Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E dans F. On appelle domaine de définition de la fonction f, et on note $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de E des éléments de E ayant une image par f. En d'autres termes :

$$\mathcal{D}_f = \{x \in E \quad | \quad \exists y \in F \quad y = f(x)\}$$

Exemple 4.2

Pour l'exemple précédent $f(x) = 1/x$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

Définition 4.3

Soient E et F deux ensembles. Une fonction f de E dans F est appelée une application si son domaine de définition est E, c'est-à-dire $\mathcal{D}_f = E$.

Exemple 4.3

Si on considère :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 1/x \end{aligned}$$

Alors f est application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

4.1.2 Injection, surjection et bijection

Définition 4.4

Une application f de E dans F est dite injection si

$$\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Exemple 4.4

L'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

Définition 4.5

Une application f de E dans F est dite surjection si

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \text{ tel que } \quad f(x) = y$$

Exemple 4.5

L'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

est surjective

Définition 4.6

Une application f de E dans F est dite bijection si elle est à la fois injective et surjective.

Exemple 4.6

Soient a et b deux réels tel que $a \neq 0$, alors L'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

est bijective

Proposition 4.1

Une application f de E dans F est bijective si et seulement si

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad \text{tel que} \quad f(x) = y$$

4.1.3 Applications bornées

Une application de E dans F est dite majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in E : \quad f(x) \leqslant M$$

Une application de E dans F est dite minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in E : \quad f(x) \geqslant m$$

4.1.4 Parité, périodicité et monotonicité

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 4.7

.

- On dit que f est paire si :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$$
- On dit que f est impaire si :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$$
- On dit que f est périodique s'il existe un réel positif $T > 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$$

On appelle période fondamentale de f le plus petit réel T strictement positif, s'il existe, satisfaisant la relation précédente.

Exemple 4.7

Les applications :

$$\begin{aligned} \sin : x \in \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin x \\ \cos : x \in \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

sont périodiques de période fondamentale 2π.

Exemple 4.8

La fonction de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{4.1}$$

est périodique mais n'admet aucune période fondamentale.

4.2 Applications Continues

4.2.1 Limite

La notion "limite" est au coeur de toute l'analyse mathématique. Nous commençons cette section en examinant pourquoi les limites sont si importantes. Ensuite, nous décrivons comment trouver la limite d'une fonction en un point donné. Nous verrons qu'une fonction peut ne pas avoir de limite en un point , et nous discutons de ce que cela signifie et comment nous pouvons dire si une fonction a ou n'a pas une limite à une valeur particulière.

Définition 4.8

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite le réel ℓ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0, \quad \forall x \quad (|x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Exemple 4.9

La fonction $f(x) = 2x + 1$ admet pour limite $\ell = 1$ au point $x_0 = 0$. En effet,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \text{ tel que } |x - 0| \leqslant \delta \implies |f(x) - 1| \leqslant \varepsilon$$

Proposition 4.2

Si la limite d'une fonction en un point existe, alors elle est unique.

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'application f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2. Prenons $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$ on a d'une part,

$$\exists\, \delta_1 > 0, \quad \forall x \quad (|x - x_0| \leqslant \delta_1 \implies |f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon)$$

et d'autre part,

$$\exists\, \delta_2 > 0, \quad \forall x \quad (|x - x_0| \leqslant \delta_2 \implies |f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon)$$

Alors, pour $|x - x_0| < \min(\delta_1, \delta_2)$, on a

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leqslant 2\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$$

donc $1 \leqslant 2/3$ contradiction.

Proposition 4.3

f admet pour limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ en x_0 si et seulement si pour toute suite réelle $(u_n)_n$ convergeant vers x_0 la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers ℓ.

Preuve

Supposons que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

alors ceci est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0, \quad \forall x \quad (|x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Soit u_n une suite qui converge vers x_0 donc puisque $\delta > 0$ donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour } n \geqslant N \quad |u_n - x_0| < \delta$$

mais donc pour $n \geqslant N$ on a $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Réciproquement, par l'absurde, supposons que pour toute suite u_n qui converge vers x_0 on a $f(u_n)$ converge vers ℓ mais

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \ell$$

cela signifie que

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, \text{ tel que } |x_\delta - x_0| < \delta \quad \text{ et } \quad |f(x_\delta) - \ell| > \varepsilon_0$$

donc puisque on $\forall \delta$ on particulier

$$\forall n \quad \exists u_n \quad |u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{ et } \quad |f(u_n) - \ell| > \varepsilon_0$$

mais donc $u_n \to x_0$ et $f(u_n)$ ne converge pas vers ℓ ce qui contredit l'hypothèse.

4.2.2 Continuité

Définition 4.9

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite $f(x_0)$ en x_0, autrement dit si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 4.10

L'application $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il suffit de remarquer que pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, si $|x - x_0| \leqslant \delta$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| \\ &\leqslant \delta |x + x_0| \leqslant \delta(2|x_0| + \delta) \\ &= \delta^2 + 2\delta |x_0| \end{aligned}$$

donc si $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ est tel que :

$$\delta^2 + 2\delta|x_0| = \varepsilon \iff \delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, $|x - x_0| < \delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$. alors,

$$|x - x_0||x + x_0| < (\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|)(\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + |x_0|) = \varepsilon$$

Exemple 4.11

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, on a

$$\sin(x)-\sin(x_0)=2\cos(\frac{x+x_0}{2})\sin(\frac{x-x_0}{2}), \tag{4.2}$$
$$|\sin(x-x_0)|\leqslant|(x-x_0)| \tag{4.3}$$
$$|\cos(x+x_0)|\leqslant 1 \tag{4.4}$$

donc

$$|\sin(x)-\sin(x_0)|\leqslant 2|x-x_0|$$

par conséquent,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta=\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall x,|x-x_0|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}\implies 2|x-x_0|<\varepsilon\implies|\sin(x)-\sin(x_0)|<\varepsilon$$

Exemple 4.12

La fonction de Dirichlet n'est pas continue en aucun point.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases} \tag{4.5}$$

Prolongement par continuité

Définition 4.10

Soient $a,b\in\bar{\mathbb{R}}$, $a<b$ et $x_0\in]a,b[$. Soit f une application définie et continue sur $]a,x_0[\cup]x_0,b[$ admettant une limite en x_0 le réel ℓ. Alors l'application $\tilde{f}$ définie sur $]a,b[$ par

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si} \quad x\in]a,x_0[\cup]x_0,b[\\ \ell & \text{si} \quad x=x_0\end{cases} \tag{4.6}$$

est une application continue sur $]a,b[$, appelée prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 4.13

Le prolongement par continuité en 0 de l'application

$$f: x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{\sin(x)}{x}$$

est l'application $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si} \quad x\in]a,x_0[\cup]x_0,b[\\ \ell & \text{si} \quad x=x_0\end{cases} \tag{4.7}$$

Théorèm 4.1

Soit f une fonction réelle définie dans un intervalle fermé et borné $[a,b]$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$. Alors :

i) f est bornée sur $[a,b]$ i.e

$$\exists M \quad \text{tel que } (\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant M)$$

ii) f atteint ses bornes i.e

$$(\exists \alpha \in [a,b]) \text{ et } (\exists \beta \in [a,b]) \text{ tels que :}$$
$$f(\alpha) = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad \text{et} \quad f(\beta) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

Preuve

Soit $y_n = f(x_n)$ avec $(x_n)_n \subset [a,b]$, la suite $(x_n)_n$ est donc bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi_n})_n$ convergente vers un point $z \in [a,b]$. Comme f est continue sur $[a,b]$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi_n}) = y = f(z) \in f([a,b])$$

Si

$$\forall n, \quad \exists x_n \in [a,b] \quad \text{tel que} \quad |f(x_n)| > n$$

alors, la suite $y_n = |f(x_n)|$ est divergente et on ne peut pas extraire une sous-suite convergente. Donc l'ensemble $f([a,b])$ est borné. On pose :

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

d'après la définition du inf et sup

$$\forall \varepsilon = 1/n, \exists \quad f(x_n) \text{ et } f(y_n) \in f([a,b]) \quad \text{telle que } : f(x_n) \leqslant m + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f(y_n) \geqslant M - \frac{1}{n}$$

on a

$$f(x_n) \to m \quad \text{et} \quad f(y_n) \to M$$

Toujours, d'après BW, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi_n})_n$ convergente vers un point $\alpha \in [a,b]$ et on peut extraire une sous-suite $(y_{\varphi_n})_n$ convergente vers un point $\beta \in [a,b]$ et finalement, la continuité de f implique que :

$$f(\alpha) = m \quad \text{et} \quad f(\beta) = M$$

4.2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorèm 4.2: (des valeurs intermédiaires)

Soit f une application continue sur un intervalle $[a,b]$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Preuve

On introduit l'ensemble E
$$E = \{x \in [a,b]; \quad f(x) \leqslant 0\}$$
évidement cet ensemble est non vide car il contient au moins a. Puisque E est une partie majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure c, qui est nécessairement $< b$. Donc $c = \sup E$, d'après la propriété de la borne supérieure
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in E \quad \text{tel que} \quad c - \varepsilon \leqslant x_\varepsilon \leqslant c$$
en particulier pour $\varepsilon = 1/n$ il existe $x_n \in E$ tel que $c - \dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant c$. La suite $(x_n)_n$ converge vers c et donc $f(x_n)$ converge vers $f(c)$ et par conséquent,
$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0$$
D'autre part, la suite $y_n = c + (b-c)/n$ est une suite décroissante converge vers c, qui satisfait
$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \geqslant 0$$
par conséquent,
$$f(c) = 0$$

Exemple 4.14

Montrer que la fonction $f(x) = 2x^3 + 1$ admet une racine réelle dans l'intervalle $[-1,1]$. En effet, la fonction f est continue sur $[-1,1]$ de plus $f(-1) = -1$ et $f(1) = 3$ donc le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [-1,1]$ tel que $f(c) = 0$.

4.2.4 Fonctions uniformément continues

Considérons une application f continue sur un intervalle I. Si l'on se reporte à la définition de la continuité, en choisissant une valeur $x_0 \in I$ et un réel ε strictement positif, on peut trouver un réel δ strictement positif tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Le réel δ dépend du réel ε et en général de x_0 et il varie si l'on choisit une autre valeur dans I pour x_0. Dans certains cas, on peut trouver un réel δ strictement positif qui reste le même pour toute valeur x_0 choisie dans l'intervalle I. On dit alors que l'application f est uniformément continue sur I. De manière plus précise, on définit l'uniforme continuité de la manière suivante

Définition 4.11

Soit f une application définie sur un intervalle I. On dit que f est uniformément continue sur I si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x,y) \in I \times I, \quad |x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \tag{4.8}$$

Exemple 4.15

L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Proposition 4.4

Soit f une application définie sur l'intervalle I. Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I.

Remarque 4.1

La réciproque est fausse : une application peut être continue sur un intervalle sans être uniformément continue sur cet intervalle.

Exemple 4.16

l'application $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour vérifier que l'application $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ nous montrons que

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ (|x-y| \leqslant \delta \text{ et } |x^2 - y^2| > \varepsilon_0)$$

En effet, $\forall \delta$ on prend $(x,y) = (\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta} + \delta)$, alors on a

$$|y^2 - x^2| = 1 + \frac{1}{2\delta} > 1$$

De même, on peut vérifier que l'application $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

On a toutefois le résultat suivant indique qu'une application continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle.

Théorèm 4.3: (de Heine)

Une application continue sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue sur cet intervalle.

Preuve

Nous démontrons ce théorème par un raisonnement par l'absurde. On suppose que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$. Cela revient à prendre la négation de la relation (4.8) i.e

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists (x,y) \in I \times I, \quad |x-y| \leqslant \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0 \tag{4.9}$$

En prenant, $\delta = 1, \dfrac{1}{2}, \dots \dfrac{1}{n}, \dots$ nous construisons deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de $[a,b]$ satisfaisant :

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$$

D'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, il exist une sous-suite (x_{φ_k}) convergente vers un réel $\alpha \in [a,b]$ la sous-suite $(y_{\varphi_k})_k$ est convergente aussi vers α. Comme f est continue en α

$$\exists \eta > 0 \quad |x - \alpha| < \eta \implies |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon_0/3$$

et on a

$$|x_{\varphi(k)} - \alpha| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |y_{\varphi(k)} - \alpha| \leqslant \eta$$

Mais alors,

$$\varepsilon_0 < |f(x_{\varphi(k)}) - f(y_{\varphi(k)})| \leqslant |f(x_{\varphi(k)}) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(y_{\varphi(k)})| < 2\varepsilon_0/3$$

cela signifie que $3 < 2$ contradiction.

4.2.5 Fonctions lipschitziennes

Définition 4.12

Soit f une application définie sur un intervalle I. On dit que f est lipschitzienne de rapport $K>0$ sur I si

$$\forall (x,y) \in I \times I, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|$$

On dit que f est contractante sur I si f est lipschitzienne de rapport K sur I avec $0<K<1$.

Proposition 4.5

Si f est une application lipschitzienne sur un intervalle I donné alors elle est uniformément continue sur I (et en particulier, elle est continue sur I).

Preuve. Soit $\varepsilon>0$, on prend $\delta=\varepsilon/K$, puisque on a

$$|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|$$

donc si $|x-y| \leqslant \delta$ alors on a

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 4.17

La fonction valeur absolue est lipschitzienne, car

$$||x|-|y|| \leqslant |x-y|$$

4.3 Notation de Landau

En mathématiques, plus précisément en analyse, la comparaison asymptotique est une méthode consistant à étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un point (ou en l'infini), en regard du comportement d'une autre fonction réputée " simple " et " connue" souvent choisie sur une échelle de référence.

4.3.1 Prépondérance

Définition 4.13

Soient f et g deux fonctions de la variable réelle x. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0. On dit que f est négligeable devant g, ou que g est prépondérante devant f en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$, lorsque

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

et on note $f=o(g)$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$.

Proposition 4.6

On a les propriétés suivantes :

$$o(f)+o(f)=o(f)$$
$$o(f)-o(f)=o(f)$$

Exemple 4.18

1. $\sin(x) = o(\cos(x))$ au voisinage de $x_0 = 0$, car :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$
2. $\ln(x) = o(x)$ au voisinage $x_0 = \infty$, car
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
3. $x = o(e^x)$ au voisinage $x_0 = \infty$, car
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Proposition 4.7

Soient $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}, \lambda \in \mathbb{R}$, f, g, h, ℓ, quatre applications définies au voisinage de x_0, alors on a :

1.
$$\begin{cases} f = o(h) \text{ au voisinage } x_0 \\ g = o(h) \text{ au voisinage } x_0 \end{cases} \Longrightarrow f + g = o(h) \tag{4.10}$$
2.
$$f = o(h) \text{ au voisinage } x_0 \Longrightarrow \lambda \cdot f = o(h) \tag{4.11}$$
3.
$$\begin{cases} f = o(h) \text{ au voisinage } x_0 \\ g = o(\ell) \text{ au voisinage } x_0 \end{cases} \Longrightarrow f \times g = o(h \times \ell) \tag{4.12}$$
4.
$$\begin{cases} f = o(g) \text{ au voisinage } x_0 \\ g = o(h) \text{ au voisinage } x_0 \end{cases} \Longrightarrow f = o(h) \tag{4.13}$$

4.3.2 Domination

La notation grand O de Landau dénote le caractère dominé d'une fonction par rapport à une autre.

Définition 4.14

Soient f et g deux fonctions de la variable réelle x. On dit que f est dominée par g en $+\infty$, ou que g domine f en $+\infty$, si
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad x > M \quad |f(x)| \leqslant C|g(x)|$$
et on note $f = O(g)$.
De même, si x_0 est un nombre réel, nous écrivons $f = O(g)$ au voisinage de x_0 si
$$|x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x)| \leqslant C|g(x)|$$

Proposition 4.8

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, f et g deux applications définies au voisinage de x_0. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de x_0. Alors f est dominée par g si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de x_0 et on note $f = O(g)$ au voisinage de x_0.

Exemple 4.19

1. $x\sin(x) = O(x)$, au voisinage de 0 car $\left|\dfrac{x\sin(x)}{x}\right| \leqslant 1$
2. $\sin(x) = O(\cos(x))$ au voisinage de 0, car la fonction $\tan(x)$ est continue en 0 donc bornée.

Remarque 4.2

Dire que f est dominée par g au voisinage de x_0 ne signifie pas que l'on a $f \leqslant g$ au voisinage de x_0 ; par exemple $2x = O(x)$ au voisinage de x_0.

4.3.3 Équivalence

Définition 4.15

Soient f et g deux fonctions de la variable réelle x. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0. On dit que f est équivalente à g en x_0, ou que g équivaut à f en x_0, lorsque

$$\lim_{x \to x_0} \{f(x) - g(x)\} = o(g)$$

et on note $f \sim g$

Proposition 4.9

Soient f et g deux fonctions de la variable réelle x. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0. Alors f est équivalente à g en x_0, ou que g équivaut à f en x_0, si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Exemple 4.20

1. $\sin(x) \sim x$ au voisinage de 0.
2. $e^x - 1 \sim x$ au voisinage de 0.

4.4 Exercices

4.4.1 Exercices (TD)

Exercice 4.1

On désigne par E la fonction partie entière.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$E(x+n) = E(x)+n$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $E(-x)$ à l'aide de $E(x)$.

3. Soit $f : x \to |2(E(x)-x)+1|$

a. Calculer la $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et montrer que f est une fonction paire.

b. Montrer que f est périodique, de période 1.

c. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.2

Calculer la limite en 0 des applications suivantes :

$$f : x \in]-1,0[\cup]0,1[\to x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \tag{4.14}$$

$$f : x \in]-1,0[\cup]0,1[\to x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{4.15}$$

$$f : x \in]-1,0[\cup]0,1[\to \frac{1}{x}\left|\sin(x)\right| \tag{4.16}$$

Exercice 4.3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{4.17}$$

Montrer que f n'est pas continue en aucun point $x_0 \in \mathbb{R}$.
Indication : Utiliser la continuité séquentielle.

Exercice 4.4

Montrer que l'application

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.5

L'objet de cet exercice est de démontrer une variante du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'un intervalle non borné. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 4.6

Vérifier si les fonctions suivantes sont uniformément continues ou lipschitziennes :

$$f : x \in [-1,1] \to x^2 \tag{4.19}$$
$$f : x \in [0,1] \to \sqrt{x} \tag{4.20}$$
$$f : x \in [-1,1] \to |x| \tag{4.21}$$

$$H : x \in [-1,1] \to H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

$$f : x \in [-1,1] \to f(x) = \begin{cases} x^{3/2}\sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

Nous rappelons que si f une fonction lipschitzienne sur un intervalle I, alors elle est uniformément continue sur I.

Exercice 4.7

Montrer que $E(x) \sim x$ au voisinage de $\pm\infty$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

4.4.2 Exercices supplémentaires

Exercice 4.8

Soient : $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{si} x \leqslant 2 \\ a - \dfrac{b}{x} \text{ si } 2 < x \leqslant 4 \\ 1 \text{si} x > 4 \end{cases} \tag{4.24}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 4.9

1. Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$; montrer que f est "presque lipschitzienne" au sens : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists C_\varepsilon$; $\forall x, y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C_\varepsilon |x-y| + \varepsilon$.
2. Montrer qu'une fonction f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$ où a et b sont des constantes.

Exercice 4.10

Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge. Montrer que f tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Retrouver ainsi le fait que la fonction $\sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

Chapitre 5

Fonctions dérivables

Nous considérons dans ce chapitre uniquement des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5.1 Généralités

Définition 5.1

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.

- ☛ On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si la quantité

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite, noté $f'(x_0)$, est appelée **dérivée de** f en x_0.

- ☛ On dit que f est dérivable sur un intervalle $J \subset I$, si pour tout $x \in J$, la fonction f est dérivable en x_0. On appelle alors dérivée de f et on note f' l'application de J dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in J$ associe $f'(x)$ la dérivée de f en x.

Exemple 5.1

La dérivée de l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ en x_0 est $2x_0$. En effet, pour tout $h > 0$ on a

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} \Delta_{x_0}(h) = 2x_0$$

Exemple 5.2

La dérivée de la fonction sinus en un point x_0 est $\cos x_0$. En effet, pour tout $h > 0$ on a

$$\begin{aligned}\Delta_{x_0}(h) &= \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \frac{\sin h}{h} - \sin x_0 \frac{1-\cos h}{h}\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} \Delta_{x_0}(h) = \cos x_0$$

Exemple 5.3

L'application

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en $x_0 = 0$. En effet,

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$$

cette quantité n'a pas de limite lorsque h tend vers 0.

Définition 5.2

Soient f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable à droite (reps. à gauche) en x_0 si

$$\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{(reps. à gauche)} \quad \lim_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe et finie. Cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$ (reps. $f'_g(x_0)$) et elle est appelée dérivée à droite (reps. à gauche) de f en x_0.

Proposition 5.1

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0 est qu'elle soit dérivable à droite en x_0 et dérivable à gauche en x_0 et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 5.4

Considérons la fonction valeur absolue. $f(x) = |x|$ alors, $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

5.1.1 Interprétation graphique

Proposition 5.2

Soient f une application définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Preuve. Supposons que f est dérivable en x_0, il suffit démontrer que :

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

on a

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\Delta_{x_0}(h)$$

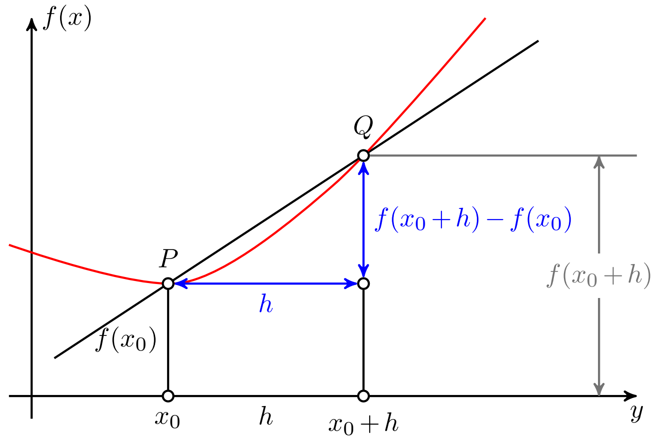

Fig. 5.1 Interpretation graphique

5.1.2 Dérivées de quelques fonctions usuelles

Tableau 5.1 Quelques dérivées usuelles

Fonction f	D_f	Fonction dérivée f'	$D_{f'}$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$x^\alpha,\ \alpha\in]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\}$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\}$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\, x$	$\mathbb{R}$	$1-\mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\mathbb{R}$
$\arccos x$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arcsin x$	. $[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

5.1.3 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Proposition 5.3

Soient f et g deux application définies sur un intervalle ouvert I. Si f et g sont dérivables en $x_0 \in I$ (resp. sur I) alors

✔ $f+g$ est dérivable en x_0 et on a

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

✔ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda \times f$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

✔ $f \times g$ est dérivable en x_0 et on a

$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

✔ si de plus $g(x_0) \neq 0$ (resp. g ne s'annule pas sur I), $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 g (resp. sur I) et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Nous admettons le résultat suivant concernant la dérivation des applications composées

Proposition 5.4

Soient f une application définie sur un intervalle ouvert I, J une partie de $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$ et g une application de J dans $\mathbb{R}$. Soient $x_0 \in I$ et $y = f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en y_0 alors l'application composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]f'(x_0)$$

Proposition 5.5: formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions n fois dérivable en x alors la dérivée nième du produit est donnée par la formule :

$$(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

Preuve

Par récurrence.

5.2 Différentiabilité

Définition 5.3

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur I. On dit que f est différentiable en $x_0 \in I$ s'il existe une application ε définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et un réel α tel que

$$\forall h \in \mathcal{V} \quad f(x_0+h) - f(x_0) = \alpha h + h\varepsilon(h) \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

L'application linéaire df_{x_0} définie par

$$df_{x_0} : h \in \mathbb{R} \mapsto \alpha h$$

est appelée différentielle de f en x_0.

Exemple 5.5

Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x_0+h) - f(x_0) = (x_0+h)^2 - x_0^2 = 2x_0 h + h\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. On en déduit que l'application f admet pour différentielle en x_0 l'application

$$df_{x_0} : h \in \mathbb{R} \to 2x_0 h$$

Le lien entre la dérivée de f et la différentielle de f en x_0 est donné par la proposition suivante

Proposition 5.6

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction réelle définie sur I et $x_0 \in I$. f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 De plus, la différentielle de f en x_0 est alors

$$df_{x_0} : h \mapsto f'(x_0)h$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + df_{x_0}h + o(h)$$

5.2.1 Théorème des accroissements finis

Théorèm 5.1: Rolle

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. Si

1. f continue sur $[a,b]$.

2. f dérivable sur $]a,b[$.

3. $f(a) = f(b)$

alors il exist un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Preuve. La fonction f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$ donc elle atteint son maximum et son minimum, i.e.,

$$\exists c_1, c_2 \in [a,b] \quad f(c_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(c_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

Si $c_1 = a$ alors f est constante et donc $f'(c) = 0, \forall c$.

Supposons maintenant que $a < c_1 < b$

$$f(c_1) \geqslant f(c_1 + h) \qquad f(c_1 + (-h)) \leqslant f(c_1)$$

$$f'_d(c_1) = \lim_h \frac{f(c_1) - f(c_1+h)}{h} \geqslant 0 \qquad f'_g(c_1) = \lim_h \frac{f(c_1) - f(c_1+(-h))}{h} \leqslant 0$$

mais puisque f est dérivable en c_1 alors

$$f'_d(c_1) = f'_g(c_1) = f'(c_1) = 0$$

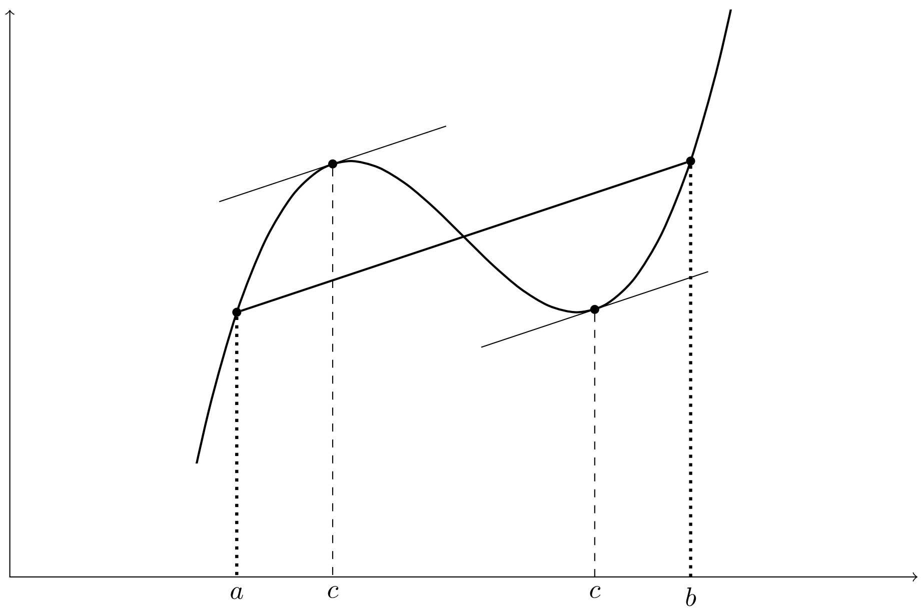

Fig. 5.2 Interprétation graphique du théorème des accroissements finis

Théorèm 5.2: des accroissements finis

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. Si

1. f continue sur $[a,b]$.

2. f dérivable sur $]a,b[$.

alors il exist un réel $c\in]a,b[$ tel que :

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

5.2.2 Extrémum

Définition 5.4

Une fonction réelle f définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$.

- ✔ On dit que f admet un maximum local (reps. minimum local) en $x_0\in D$ s'il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 inclus dans D tel que

$$\forall x\in I \quad f(x)\leqslant f(x_0), \qquad \text{resp. } f(x)\geqslant f(x_0)$$

Un maximum ou un minimum local est appelé un extremum local.

- ✔ On dit que f admet un maximum global (reps. minimum global) en $x_0\in D$ si

$$\forall x\in D \quad f(x)\leqslant f(x_0), \qquad \text{resp. } f(x)\geqslant f(x_0)$$

Proposition 5.7

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ et f une fonction réelle dérivable sur un intervalle ouvert de centre x_0.

- ✔ Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors $f'(x_0)=0$
- ✔ Si $f'(x_0)=0$ et si f' change de signe en x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

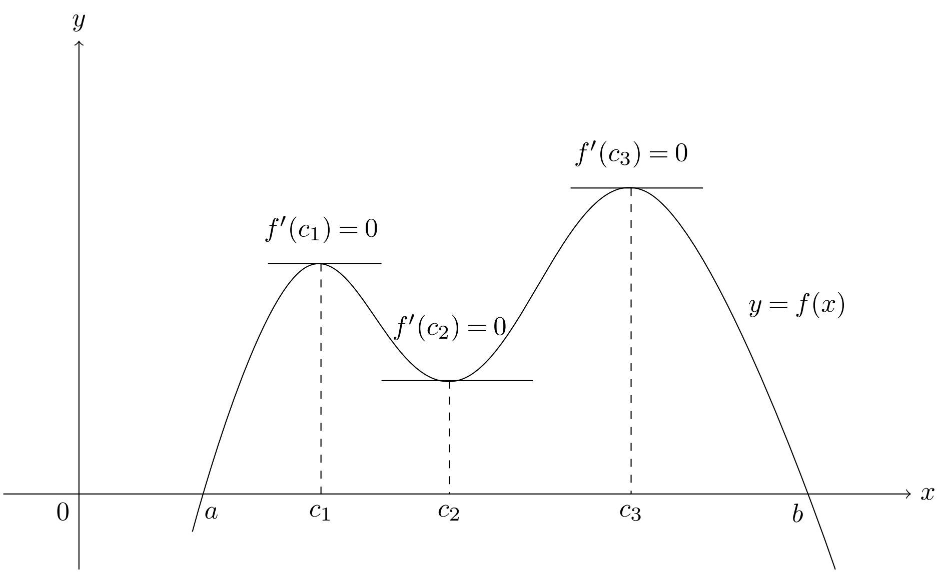

Fig. 5.3 Maximum et minimum locaux

5.2.3 Convexité et concavité

Définition 5.5

Une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite convexe si :

$$\forall (x_1,x_2)\in [a,b]^2, \forall \lambda \in [0,1],$$
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

Une fonction réelle f définie sur $[a,b]$ est dite concave sur $[a,b]$ si l'application $-f$ est convexe.

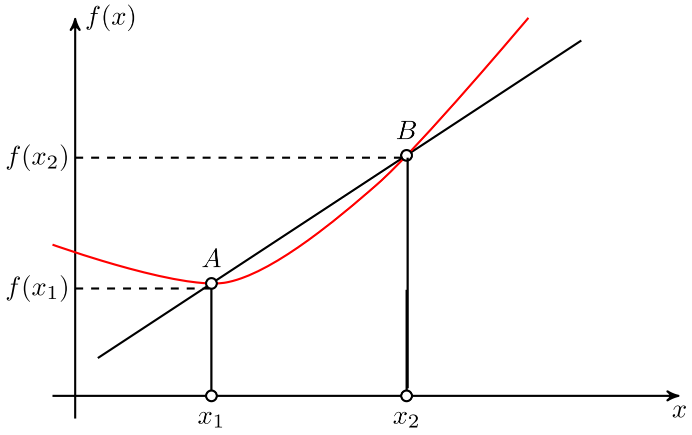

Fig. 5.4 fonction convexe

Proposition 5.8

Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit convexe sur $[a,b]$ est que f' soit croissante sur $]a,b[$.

Preuve

Nous démontrons que si f' est croissante alors f est convexe.
On introduit $x^* = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, pour $\lambda \in [0,1]$ on a $x^* \in [x_1, x_2]$, alors :
$\exists c_1 \in]x_1, x^*[$ tel que

$$\frac{f(x^*) - f(x_1)}{x^* - x_1} = f'(c_1)$$

$\exists c_2 \in]x_1, x^*[$ tel que

$$\frac{f(x_2) - f(x^*)}{x_2 - x^*} = f'(c_2)$$

comme f' est croissante, alors on a forcément,

$$f'(c_1) \leqslant f'(c_2) \iff \frac{f(x^*) - f(x_1)}{x^* - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x^*)}{x_2 - x^*}$$

donc on trouve que :

$$\begin{aligned}
&(x_2 - x^*)(f(x^*) - f(x_1)) \leqslant (x^* - x_1)(f(x_2) - f(x^*)) \\
\iff &\lambda(x_2 - x_1)(f(x^*) - f(x_1)) \leqslant (1-\lambda)(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x^*)) \\
\iff &\lambda(f(x^*) - f(x_1)) \leqslant (1-\lambda)(f(x_2) - f(x^*)) \\
\iff &f(x^*) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)
\end{aligned}$$

Corollaire 5.1

Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[a,b]$ admettant une dérivée seconde sur $]a,b[$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit convexe sur $[a,b]$ est que f'' soit positive sur $]a,b[$.

5.2.4 La règle de L'Hopital

Théorèm 5.3: (théorème des accroissements finis généralisés)

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $[a,b]$. Si f et g sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Alors il exist un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$$

Preuve

Le cas $g(b) = g(a)$ est trivial. Si $g(a) \neq g(b)$, on considère la fonction d'aide

$$\phi(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) g(x)$$

donc

$$\begin{aligned}\phi(a) &= f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) g(a) \\ &= \frac{f(a)\left(g(b) - g(a)\right) - \left(f(b) - f(a)\right) g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(b) &= f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) g(b) \\ &= \frac{f(b)\left(g(b) - g(a)\right) - \left(f(b) - f(a)\right) g(b)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}\end{aligned}$$

Alors on trouve que :

$$\phi(a) = \phi(b)$$

Proposition 5.9

Soient f et g deux fonctions réelles continues sur un voisinage de x_0 et dérivables au voisinage de x_0. On suppose que g' ne s'annule pas au voisinage de x_0. Alors,

$$\left(\exists \ell \in \bar{\mathbb{R}} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\right) \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \ell$$

Preuve

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(c_1), \quad x < c_1 < x_0 \\ \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= f'(c_2), \quad x < c_2 < x_0\end{aligned}$$

alors,

$$\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

Exemple 5.6

Utiliser la règle de L'Hôpital pour calculer la limite en 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x^2}$$

Remarque 5.1

L'implication réciproque dans la règle de L'Hôpital est fausse. Considérons les applications f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

et $g(x) = \sin x$

5.2.5 Dérivées d'order supérieure

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I et dérivable sur I. Si la dérivée de f est à son tour dérivable, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f' qui est appelée dérivée seconde de f. On peut ainsi de proche en proche définir pour $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième (ou d'ordre n) de f que l'on note $f^{(n)}$. Par convention

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \dots,$$

On dit que f est indéfiniment dérivable sur $J \subset I$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de f est définie sur J.

Remarque 5.2

✔ Il se peut que les ensembles de définition de f, f', f'' , etc soient distincts. C 'est le cas par exemple pour $f(x) = x^{3/2}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ mais dont la dérivée $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$.
✔ L'existence de $f^{(n)}$ suppose que $f^{(n-1)}$ soit définie sur un voisinage de x_0 et pas uniquement en x_0

5.2.6 Formule de Taylor

Théorèm 5.4

Soient f une fonction de class $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et a, b deux réels distincts appartenant à I. On suppose que f admet une dérivée (n+1)-ième sur I. Alors pour tout $h \in [0, b-a]$ il existe $\varepsilon(h)$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} \left(f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(h) \right) \tag{5.3}$$

avec $\varepsilon(h)$ tends vers 0 lorsque h tend vers 0.

Preuve

Pour $n=0$, la relation (5.3) s'écrit :

$$f(a+h)=f(a)+(f'(a)+\varepsilon(h))h=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h)$$

ce qui est vrai puisque f est différentiable au point a.
Pour $n\geqslant 1$, soit C le nombre réel qui satisfait :

$$f(a+h)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k=\frac{C}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Introduisons maintenant la fonction φ définie dans par :

$$\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k-\frac{C}{(n+1)!}x^{n+1}$$

il est claire que :

$$\varphi(0)=0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(h)=0$$

donc d'après le théorème de Rolle,

$$\exists h_1\in]0,h[\quad \text{tel que } \varphi'(h_1)=0,$$

Mais on a

$$\varphi'(x)=f'(a+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}x^{k-1}-\frac{C}{n!}x^n$$

ce qui implique

$$\varphi'(h_1)=f'(a+h_1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}h_1^{k-1}-\frac{C}{n!}h_1^n=0$$

donc à nouveau

$$\varphi'(h_1)=0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0)=0.$$

Appliquons le théorème de Rolle pour la fonction φ', il existe alors $h_2\in]0,h_1[$ tel que

$$\varphi''(h_2)=0.$$

On continue ainsi jusqu'à l'ordre n pour déterminer h_n

$$0<h_n<h_{n-1}<\ldots<h_1<h \quad \text{tel que } \varphi^{(n)}(h_n)=0$$

Or,

$$\varphi^{(n)}(x)=f^{(n)}(a+x)-f^{(n)}(a)-Cx$$

donc $\varphi^{(n)}(h_n)=0$ signifie que

$$0=f^{(n)}(a+h_n)-f^{(n)}(a)-Ch_n \iff C=\frac{f^{(n)}(a+h_n)-f^{(n)}(a)}{h_n}$$

mais,

$$f^{(n)}(a+h_n)=f^{(n)}(a)+h_nf^{(n+1)}(a)+h_n\varepsilon(h_n)$$

donc

$$C=f^{(n+1)}(a)+\varepsilon(h)$$

Remarque 5.3

Le terme :

$$\frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(a)+\varepsilon(h)\right)$$

est appelé le reste de Young.

Théorèm 5.5

Soient f une fonction de class $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et a,b deux réels distincts appartenant à I. On suppose que f admet une dérivée $(n+1)$-ième sur I. Il existe alors un réel c dans l'intervalle ouvert d'extrémités a et b tel que

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Remarque 5.4

1. Le terme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ est appelé reste de Taylor-Lagrange d 'ordre n
2. On retrouve pour la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 0, la formule des accroissements finis.

5.2.7 Applications de la formule de Taylor

Approximation polynomiale

La formule de Taylor-Lagrange peut être utilisée pour établir certaines inégalités. Soient I un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^n sur I qui admet une dérivée $(n+1)$ ième sur I. Pour $a\in I$, considérons la fonction polynomiale

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

On vérifie sans peine que pour tout entier k avec $0\leqslant k\leqslant n$ on a $p^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$. On peut donc s'attendre à ce que pour n assez grand, la fonction polynomiale p constitue une bonne approximation de la fonction f dans un voisinage de a. La précision de cette approximation est donnée par la formule de Taylor-Lagrange qui nous indique qu'il existe un réel c compris entre a et x tel que

$$f(x)=p(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Supposons que la dérivée $(n+1)$-ième de f sur l'intervalle I soit bornée par le réel positif M, i .e. supposons que

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M,\quad \forall x\in I$$

Dans ce cas l'erreur d'approximation de f par p est majorée par

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$$

Cette quantité est appelée la borne d 'erreur absolue. Cette erreur est petite si M n'est pas trop grand et si a contrario n est choisi suffisamment grand.

Exemple 5.7

À titre d'exemple, considérons la fonction sinus sur l'intervalle $[0,1]$. On vérifie par récurrence que

$$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\pi/2)$$

Prenons $n = 4$. La fonction sinus est approchée par la fonction polynomiale

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

avec une erreur qui est en tout point x plus petite que $x^5/5!$. Il s'agit là d'une majoration de l'erreur ; l'erreur en un point donné peut être beaucoup plus petite que l'estimation donnée par la borne d'erreur absolue.

Exemple 5.8

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

5.3 Exercices (TD)

Exercice 5.1

Soit f dérivable en $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}$.

Exercice 5.2

En utilisant la règle de L'Hôpital, calculer

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$$

Exercice 5.3

Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$ on a

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 5.4

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.

b. En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.

2. a. En déduire l'inégalité suivante :

$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

b. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Exercice 5.5: (Inégalité de Young)

1. Montrer que la fonction logarithme népérien ln est concave sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que $\forall a, b > 0$ et $1 < p < \infty$ on a

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

3. Montrer que si pour un certain α, avec $0 < \alpha < 1$, on a

$$A \leqslant BA^\alpha + C$$

alors, on a

$$A \leqslant \frac{(1-\alpha)}{\alpha} B^{\frac{1}{1-\alpha}} + 2C$$

Exercice 5.6

Soit f une fonction définie sur l'intevalle $[a, a+2h]$, dérivable dans dans cet intervalle. On suppose que $f''(a)$ existe.

1. Montrer que :
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2} = f''(a)$$
(On pourra utiliser la fonction $\varphi(x)) = f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)-Cx^2$, où C est choisi de façon que $\varphi(h)=0$

5.4 Exercices supplementaires

Exercice 5.7

Montrer que la dérivée de la fonction cosinus en x_0 vaut $-\sin x_0$.

Exercice 5.8

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 5.9

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :
$$f_1(x) = x^2\cos\frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_1(0) = 0;$$
$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_2(0) = 0;$$
$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, \quad \text{si } x \neq 1 \qquad ; \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 5.10

Montrer que le polynôme P_n défini par
$$P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$$
est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples, et appartiennent à $[-1,1]$.

Exercice 5.11

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction
$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$
sur l'intervalle $[a,b]$ préciser le nombre "c" de $]a,b[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 5.12

Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0,1[$
$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

Exercice 5.13

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}$. de
$$f(x) = x^4 - x^3 + 1$$

Exercice 5.14

Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$.

2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$

Exercice 5.15

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.

2. Etudier l'existence de $f''(0)$.

3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où P_n est un polynôme.

a. Trouver P_1 et P_2.

b. Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Montrer que f est de classe C^∞.

Exercice 5.16

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont dérivables en 0 ?

1. $f(x) = x$;

2. $f(x) = |x|$;

3. $f(x) = \sqrt{x}$;

4. $f(x) = \cos x$;

5. $f(x) = E(x)$;

6. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

7. $f(x) = |x - 2|$;

Exercice 5.17

1. Déterminer tous les couples de réels (a, b) tels que la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 - x + 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue en 1 ; dérivable en 1.

2. On pose ici : $a = 1$ et $b = -1$. Calculer, si elle existe, la valeur de $\lim\limits_{x \to 1} g'(x)$, puis tracer C_g, la courbe représentative de g.

3. La fonction g est-elle dérivable en 1 ? Pourquoi ?

4. Comment se manifeste graphiquement le résultat obtenu pour la valeur de $\lim\limits_{x \to 1} g'(x)$?

Exercice 5.18

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[-1, 1]$. Montrer que f est C^1 sur $]-1, 1[$.

Exercice 5.19

Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire. Expliquer le sens géometrique de ce fait.

Exercice 5.20

Déterminer $f'(a)$ pour $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, où la fonction φ est continue en a. Application : déterminer $f'(1)$ pour $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-1000)$.

Exercice 5.21

Déterminer les limites suivantes en utilisant la règle de L'Hospital :

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-4x+3}\ ; \quad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\ ; \quad c)\ \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)x}{|x-1|}\ ; \quad d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+2}{(x+2)\ln(x+1)}\ ;$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\ ; \quad f)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}\ ; \quad g)\ \lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}\ ; \quad h)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\ ;$$

$$i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x}\ ; \quad j)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)\ .$$

Exercice 5.22

Appliquer la formule des accroissements finis à $f(x) = \ln(|\ln x|)$ entre k et $k+1$ ($k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$). En déduire que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} > \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)),$$

puis la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

Exercice 5.23

Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, et soit $x_0 \in]a,b[$.

1. Déterminer le réel K tel que la fonction φ, définie sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(t) = f(t) - K(t-a)(t-b)$$

s'annule au point x_0.

2. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction φ sur $[a,x_0]$, puis sur $[x_0,b]$ (K ayant la valeur trouvée au 1.), démontrer qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(x_0) = \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(c)$$

.

Exercice 5.24

Soit une fonction continue sur $[a,b]$ et n fois dérivable sur $]a,b[$. Sachant que f s'annule en $n+1$ valeurs réelles *distinctes* dans $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 5.25

Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $[a,b]$, telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$ et $\forall x \in [a,b]$, $f''(x) \leqslant g''(x)$. Démontrer que $\forall x \in [a,b], \quad g(x) \leqslant f(x)$.

Exercice 5.26

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) > 0$.

1. Montrer que $\exists \lambda > 0$ tel que $\forall x \in [0,1], \ f'(x) \geqslant \lambda$.

2. Si $f(0) = 0$, montrer que $\forall x \in [0,1], \ f(x) \geqslant \lambda x$.

Exercice 5.27

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\ f(x) = \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et admet un prolongement par continuité en 0 dont on justifiera soigneusement l'existence.

2. a. Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et calculer f' en ces points.

b. Montrer l'existence et déterminer la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ et en déduire que f est dérivable à droite en 0.

c. Déduire à l'aide d'une propriété de parité sur $\mathbb{R}^*$ que f est dérivable à gauche en 0 sans être dérivable.

Exercice 5.28

1. $\ln(1+|x|)$;

2. $f(x) = \sqrt{|x|}$;

3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Exercice 5.29

Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en particulier en $x = 0$).

2. Étudier l'existence de $f''(0)$.

3. Démontrer par récurrence sur n que que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ ou P_n est un polynôme dont on précisera le degré. Donner P_1 et P_2.

4. Montrer alors que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.30

Soit P un polynôme à coefficients réels. On veut montrer que l'équation $P(x) = e^x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, n'admet qu'un nombre fini de solutions.

1. Soit n un entier naturel. Montrer que si l'équation $P^{(n)}(x) = e^x$ a au moins k solutions ($k \in \mathbb{N}^*$), alors l'équation $P^{(n+1)}(x) = e^x$ a au moins $k-1$ solutions.

2. En déduire que l'équation $P(x) = e^x$ a au plus $deg\, P + 1$ solutions. Conclure.

Exercice 5.31

Sous quel angle se coupent les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$?

Chapitre 6

Fonctions élémentaires

6.1 Application réciproque

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application définie sur I et $J = f(I)$. On s'intéresse aux conditions d'existence d'une bijection réciproque pour f, c'est -à- dire à l'existence d'une application f^{-1} de J dans I telle que

$$\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Proposition 6.1

Si f est :

✔ continue sur I

✔ strictement monotone sur I

alors f est une bijection de I dans $J = f(I)$ et admet une bijection réciproque f^{-1} de J dans I qui possède les propriétés suivantes :

✔ f^{-1} est strictement monotone sur J et de même sens de monotonie que f

✔ f^{-1} est continue sur J.

Preuve

Le fait que f est continue sur I qui est un intervalle, implique que J est un intervalle comme l'image de I par f.
Supposons que f est strictement croissante sur I, le cas où f est strictement décroissante se traite d 'une manière analogue.
Pour montrer que f est injective, considérons $(x_1, x_2) \in I \times I$, avec $x_1 \neq x_2$ alors on a donc $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$ et puisque f est strictement croissante on a donc forcement $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$ donc f est injective.
Pour la surjectivité, par définition $f : I \to f(I) = J$ est surjective, donc par conséquent, f est une bijection de I dans $J = f(I)$.
Montrons que si I est strictement croissante sur I alors f^{-1} est strictement croissante sur J, i.e. montrons que si f est strictement croissante sur I alors

$$\forall y_1, y_2 \in J \text{ tels que } y_1 < y_2 \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

posons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ donc

$$y_1 < y_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \text{ ce qui implique que } x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

Preuve

Montrons à présent que f^{-1} est continue sur J. Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. On suppose que x_0 appartient à l'intérieur de l'intervalle J, la démonstration s'adapte aisément en prenant les définitions de la continuité à gauche ou à droite dans le cas où x_0 est l'une des extrémités de l'intervalle J. Pour montrer que f^{-1} est continue il suffit démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \text{tel que} \quad |y - y_0| < \delta \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

Soit $x_0 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$; comme f est continue et strictement croissante on a

$$f(x_0) \in [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$$

Pour ε assez petit, on a $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. Considérons les réels strictement positifs

$$\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon) \quad \delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$$

On a d'une part,

$$y_0 - \delta_1 = f(x_0 - \varepsilon) \implies x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0 - \delta_1)$$

et d'autre part,

$$\delta_2 + y_0 = f(x_0 + \varepsilon) \implies x_0 + \varepsilon = f^{-1}(\delta_2 + y_0)$$

pour $y \in [f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta]$ avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, on utilise le fait que f^{-1} est strictement croissante pour avoir

$$f^{-1}(y_0 - \delta_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta_2)$$

ce qui s'écrit encore

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$$

ou encore,

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

Exemple 6.1

$I = \mathbb{R}$ et $f(x) = 2x + 1$, alors $J = \mathbb{R}$ et $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}$

Proposition 6.2

Soient I et J deux intervalles ouverts et f une bijection de I dans J. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et de dérivée non nulle, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Preuve

On utilise la règle de dérivation de la fonction composée on obtient

$$(f \circ f^{-1})(y_0) = y_0 \implies f'[f^{-1}(y_0)] \times (f^{-1})'(y_0) = 1$$

Exemple 6.2

$I = \mathbb{R}$ et $f(x) = 2x + 1$, alors $J = \mathbb{R}$ et $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{2}$

6.2 Fonctions logarithmes

6.2.1 La fonction logarithme népérien

Définition 6.1

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln la primitive de l'application $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$. On a donc

$$\forall x \in]0, \infty[\quad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$

D'après la définition précédente,

- ✔ la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$. Il s'agit par conséquent d'une application continue sur $]0, +\infty[$.
- ✔ La dérivée de la fonction logarithme népérien est strictement positive sur $]0, +\infty[$; la fonction logarithme népérien est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- ✔ Comme la fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, d'après la proposition 6.1 , il s'agit d'une bijection de $]0, +\infty[$ dans son image qui est $\mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe un unique réel, noté e, tel que $ln(e) = 1$.

Proposition 6.3

Pour $x, y \in]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a les relations suivantes :

1. $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$.
2. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$.
3. $\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln y - \ln x$.
4. $\ln(x^{\alpha}) = \alpha \ln x$.

Preuve

1. Fixons $y \in]0,\infty[$ alors,

$$g(x) = \ln(xy) \implies g'(x) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = (\ln(x))'$$

donc

$$g(x) = \ln(x) + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

or

$$\ln(1) = 0 \implies g(1) = c \to \ln(y) = c$$

2. On a

$$\ln 1 = 0 \implies \ln(x \times \frac{1}{x}) = 0 \implies \ln x + \ln \frac{1}{x} = 0$$

3.

$$\ln \frac{x}{y} = \ln(x \times \frac{1}{y}) = \ln x + \ln(\frac{1}{y}) = \ln x - \ln y$$

4. soit $\alpha \in \mathbb{Q}$, donc $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, on pose $a = x^p$, alors

$$y = a^{1/q} \iff y^q = a \iff q \ln y = \ln a \iff \ln y = \frac{1}{q} \ln a$$

$$\ln(x^\alpha) = \ln y = \frac{1}{q} \ln(a) = \frac{1}{q} \ln(x^p) = \frac{p}{q} \ln(x)$$

Proposition 6.4

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \ln \frac{(x+1)}{x} = 1$$

Preuve

Pour démontrer que

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$$

il suffit démontrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \exists r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } x > r \implies \ln x \geqslant \lambda$$

En effet, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $n = E\left(\frac{\lambda}{\ln 2}\right) + 1$, il est claire que $n > \frac{\lambda}{\ln 2}$, alors pour $r = 2^n$

$$x > r \implies \ln x > \ln r = n \ln\left(\frac{\lambda}{\ln 2}\right) \geqslant \left(\frac{\lambda}{\ln 2}\right) \ln 2 = \lambda$$

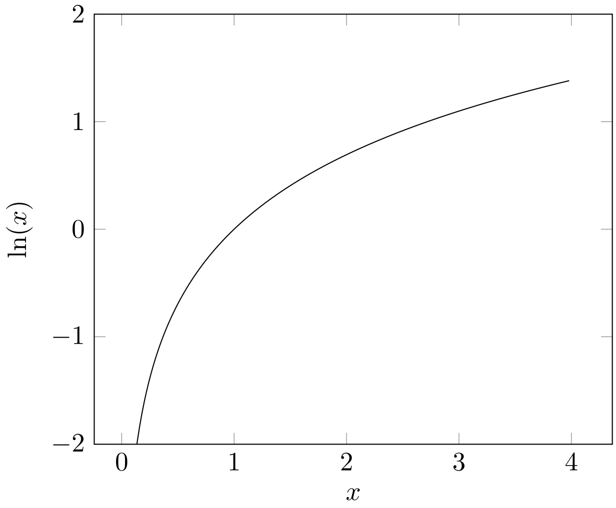

Fig. 6.1 fonction $\ln(x)$

6.2.2 La fonction logarithme de base a

Définition 6.2

Pour $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on appelle fonction logarithme de base a l'application

$$\log_a : x \in]0,+\infty[\mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque 6.1

1. La fonction logarithme de base a vérifie des relations analogues à celles énoncées pour la fonction logarithme népérien.
2. Dans les sciences de l'ingénieur, on a souvent recours au logarithme base 10 et au logarithme base 2.

6.3 Fonctions exponentielles

6.3.1 La fonction exponentielle

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et son image est $\mathbb{R}$, donc, elle admet une fonction réciproque.

Définition 6.3

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien et on la note exp, elle satisfait :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp(x)) = x) \quad \text{et} \quad (\forall y \in]0,+\infty[, \quad \exp(\ln(y))) = y$$

Proposition 6.5

- ✔ La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ✔ La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée l'application

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$$

Preuve

En effet, pour $y = \ln(x)$ on a $x = \exp(y)$ et

$$\exp'(y) = \frac{1}{\ln'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \exp(y)$$

6.3.2 La fonction exponentielle de base a

Pour $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ la fonction logarithme de base a est continue sur $]0,+\infty[$ strictement monotone à image $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque appelée fonction exponentielle de base a qui est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle de base a est l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x\ln(a))$. En effet, compte tenu du fait que l a fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log_a(\exp(x\ln(a))) = \frac{\ln(\exp(x\ln(a)))}{\ln a} = x$$

6.4 Fonction puissances

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}} = ((-1)^2)^{1/2} = 1$$

Définition 6.4

Pour tout réel α, on appelle fonction puissance d'exposant α l'application qui à $x \in]0,+\infty[$ associe le réel noté x^α défini par

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Remarque 6.2

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\exp(n \ln x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln x\right) = \prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \times x \ldots \times x}_{\text{n fois}} = x^n$$

Proposition 6.6

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a les relations suivantes :

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.

2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

3. $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta = (x^\beta)^\alpha$.

6.5 Fonctions hyperboliques

Toute application f définie sur $\mathbb{R}$ peut être décomposée de manière unique en une somme de 2 fonctions, l'une paire, l'autre impaire. En effet , pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

On vérifie sans difficulté que :

$$f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

est une fonction paire et que :

$$f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

est une fonction impaire et on montre que cette décomposition est unique.

Définition 6.5

On appelle fonction sinus hyperbolique la partie impaire de la fonction exponentielle et on note

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Définition 6.6

On appelle fonction cosinus hyperbolique la partie paire de la fonction exponentielle et on note

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Définition 6.7

On appelle fonction tangente hyperbolique le quotient de la fonction sinus hyperbolique par la fonction cosinus hyperbolique

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La proposition suivante est alors évidente.

Proposition 6.7

La fonction sinus hyperbolique notée sh ou sinh vérifie

✘
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

✘
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

✘
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

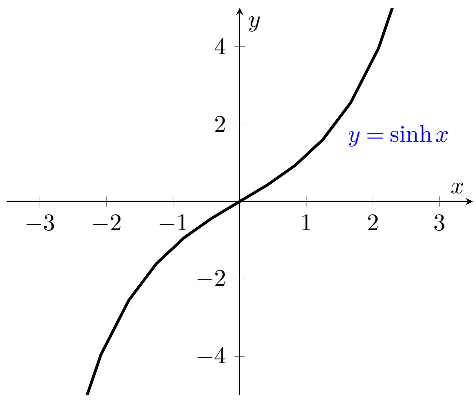

Fig. 6.2 La fonction $\sinh(x)$

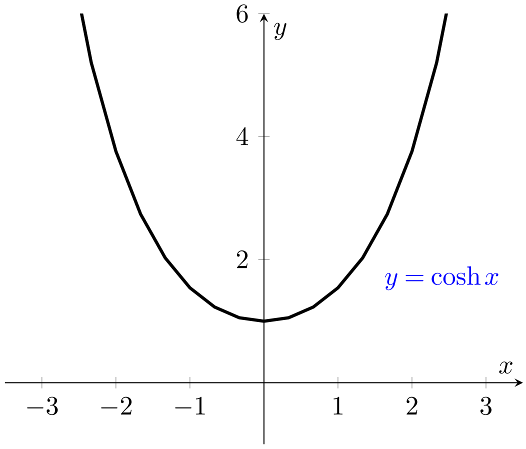

Fig. 6.3 La fonction $\mathrm{ch}(x)$

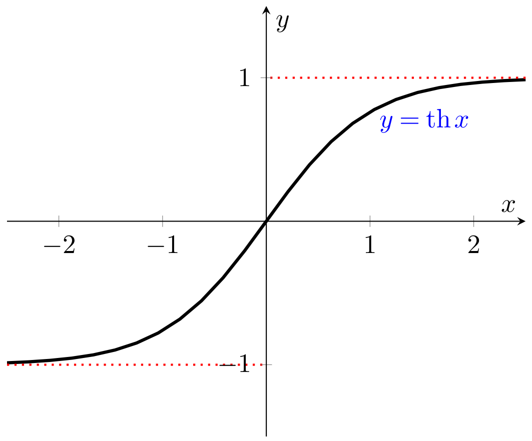

Fig. 6.4 La fonction $\operatorname{th}(x)$

Proposition 6.8

Les fonctions hyperboliques ont les propriétés suivantes :

- ✔ La fonction sinus hyperbolique est une application définie sur $\mathbb{R}$, continue, strictement croissante, impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée la fonction cosinus hyperbolique. Son image est $\mathbb{R}$.
- ✔ La fonction cosinus hyperbolique est une application définie sur $\mathbb{R}$, continue, paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée la fonction sinus hyperbolique. Son image est $]1,+\infty[$
- ✔ La fonction tangente hyperbolique est une application définie sur $\mathbb{R}$, continue, impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée l 'application $x \in \mathbb{R} \mapsto 1-\operatorname{th}^2(x)$. Son image est $]-1,1[$

Proposition 6.9

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a les relations suivantes

- ✔ $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$
- ✔ $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y\,; \quad \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$
- ✔ $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$
- ✔ $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y\,; \quad \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$
- ✔ $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$
- ✔ $\operatorname{th}\,(x+y) = \dfrac{\operatorname{th}\,x + \operatorname{th}\,y}{1-\operatorname{th}\,x \operatorname{th}\,y}\,; \quad \operatorname{th}\,2x = \dfrac{2\operatorname{th}\,x}{1+\operatorname{th}^{\,2}x}.$
- ✔ $\operatorname{th}\,(x-y) = \dfrac{\operatorname{th}\,x - \operatorname{th}\,y}{1-\operatorname{th}\,x \operatorname{th}\,y}$

6.6 Fonctions circulaires réciproques

6.6.1 La fonction arcsinus

La fonction sinus est strictement croissante sur $[-\pi/2,\pi/2]$. L'image de l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$ est $[-1,1]$. La fonction sinus réalise donc une bijection de $[-\pi/2,\pi/2]$ dans $[-1,1]$. On appelle **fonction arc-sinus** et on note arcsin ou $\sin^{-1}$ la bijection réciproque de l'application sinus. On a

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in [-\pi/2,\pi/2]$$

et

$$\sin(\arcsin(y)) = y, \quad \forall y \in [-1,1]$$

De plus,

$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \forall y \in [-1,1] \quad (\sin(x) = y \iff x = \arcsin y)$$

Proposition 6.10

La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée l'application :

$$t \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Preuve

on a $arcsin(y) = x$ et $y = \sin(x)$, alors

$$arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

6.6.2 La fonction arccos

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. L'image de $[0,\pi]$ est $[-1,1]$. La fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. On appelle fonction arc-cosinus et on note arcs ou $\cos^{-1}$ la fonction réciproque de l'application cosinus sur $[0,\pi]$. On a

$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in [0,\pi]$$

et

$$\sin(\arccos(y)) = y, \quad \forall y \in [-1,1]$$

De plus,

$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \forall y \in [-1,1] \quad (\cos(x) = y \iff x = \arccos y)$$

Proposition 6.11

La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée l'application :

$$x \in]-1,1[\mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve

on a $arcos(y) = x$ et $y = \cos(x)$, alors

$$arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = -\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

6.6.3 La fonction arc-tangente

La fonction tangente $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est définit sur :

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \neq (2k+1)\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Elle continue et dérivable sur son domaine de définition et pour $x \in \mathcal{D}$ on a

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Considérons la fonction tangente en restriction à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Elle continue et strictement croissante sur cet intervalle et a pour image $\mathbb{R}$. La fonction tangente réalise donc une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$. On a

$$\arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$$

et

$$\sin(\arctan(y)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

De plus,

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad \forall y \in [-1,1] \quad (\tan(x) = y \iff x = \arctan y)$$

Proposition 6.12

La fonction arccosinus est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ de dérivée l'application :

$$t \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto \frac{1}{1+t^2}$$

Preuve

on a $arctan(y) = x$ et $y = \tan(x)$, alors

$$arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

6.7 Fonctions hyperboliques réciproques

6.7.1 La fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et son image est $\mathbb{R}$ Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 6.8

On appelle fonction argument sinus hyperbolique et on note argsh (ou encore argsinh ou $sinh^{-1}$) la fonction réciproque de l'application sinus hyperbolique. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}(\operatorname{sh})(x) = x$$

Proposition 6.13

La fonction argument sinus hyperbolique est :

- définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- strictement croissante et a pour image $\mathbb{R}$.
- impaire.

Proposition 6.14

La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée l'application :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Preuve

puisque l a fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction cosinus hyperbolique qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur Rr. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+(\operatorname{shargsh}(x))^2}}$$

Proposition 6.15

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

6.7.2 La fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et l'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par la fonction cosinus hyperbolique est $[1,+\infty[$. La fonction cosinus hyperbolique réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$.

Définition 6.9

On appelle fonction argument cosinus hyperbolique et on note argch (ou encore argcosh ou $cosh^{-1}$) la fonction réciproque de l'application cosinus hyperbolique.

Proposition 6.16

La fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable sur $]1,+\infty[$ et admet pour dérivée l'application

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Proposition 6.17

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad \operatorname{argcosh}(x) = \ln(1+\sqrt{x^2-1})$$

6.7.3 La fonction argument tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. et son image est $]-1,1[$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

Définition 6.10

On appelle fonction argument tangente hyperbolique et on note argth (ou encore argtanh ou th^{-1}) la fonction réciproque de l'application tangente hyperbolique.

Proposition 6.18

La fonction argument tangente hyperbolique est :

- ☛ définie et continue sur $]-1,1[$,
- ☛ strictement croissante et a pour image $\mathbb{R}$
- ☛ impaire.

Proposition 6.19

La fonction argument tangente hyperbolique est dérivable sur $]-1,1[$ et admet pour dérivée l 'application :

$$x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Proposition 6.20

$$\forall x \in]-1,1[, \text{argth} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

6.8 Exercices (TD)

Exercice 6.1

Montrer que l'application $f : x \in]0,\pi/2[\mapsto 1/\sin x$ est une bijection de $]0,\pi/2[$ dans un intervalle que l'on déterminera. Calculer la dérivée de la bijection réciproque f^{-1} et tracer les représentations graphiques de f et de f^{-1}.

Exercice 6.2

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x^2-1)-\ln(2x-1)+\ln 2 = 0$.

2. $\ln(x+2)+\ln(x-4)-2\ln(x+1) = 0$.

Exercice 6.3

On appelle fonction co-tangente hyperbolique le quotient de la fonction cosinus hyperbolique par la fonction sinus hyperbolique. Étudier les variations de cette fonction et tracer son graphe.

Exercice 6.4

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(\dfrac{2x}{1+x^2})$.

Exercice 6.5

Montrer que la fonction co-tangente hyperbolique étudiée à l'exercice 6.3 réalise une bijective de son ensemble de définition dans un ensemble que l'on précisera. On appelle fonction argument co-tangente hyperbolique sa bijection réciproque. Étudier cette fonction.

Exercice 6.6

Il a été établi dans l'exercice 6.1 que l'application $f : x \in]0,\pi/2[\mapsto 1/\sin x$ est une bijection de $]0,\pi/2[$ dans $]1,+\infty[$. Donner l'expression de f^{-1}.

6.9 Exercices supplémentaires

Exercice 6.7

Déterminer en fonction de la valeur de a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\infty} \log_a(x), \quad \lim_{x\to 0^+} \log_a(x), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} x\log_a(x), \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x}$$

Exercice 6.8

Résoudre l'équation $e^{2x}-e^x-6=0$

Exercice 6.9

Déterminer en fonction de la valeur de a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x; \quad \lim_{x\to+\infty} a^x; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x}; \quad \lim_{x\to-\infty} xa^x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$$

Exercice 6.10

1. Montrer que :

$$x(1-x) \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$$

2. En déduire que pour tout $n \in N^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$e^x e^{-x^2/n} \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x$$

3. Déterminer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Exercice 6.11

1. Montrer que pour tout réel $x \in [-1,1]$ on a

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)} \frac{x^k}{k}$$

2. Montrer que pour tout réel x, on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Exercice 6.12

Soit la fonction f définie formellement par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Calculer $f'(x)$ lorsque cette dérivée existe.

3. En déduire une expression plus simple de f dans chaque intervalle où f est définie.

Chapitre 7

Calcul intégral

Dans cette section, nous développons des techniques pour approcher l'aire entre une courbe, définie par une fonction $f(x)$, et l'axe des x sur un intervalle fermé $[a,b]$.
Comme Archimède,

- ☛ nous approchons d'abord l'aire sous la courbe en utilisant des formes d'aire connue (à savoir des rectangles).
- ☛ En utilisant des rectangles de plus en plus petits, nous nous rapprochons de plus en plus de la zone.
- ☛ Prendre une limite nous permet de calculer l'aire exacte sous la courbe.

7.1 L'intégrale définie

Si $f(x)$ est une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$, l'intégrale définie de f de a à b est donnée par

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

à condition que la limite existe. Si cette limite existe, la fonction $f(x)$ est dite intégrable sur $[a,b]$, ou est une fonction intégrable. Les nombres a et b sont appelés les limites de l'intégration ; spécifiquement, a est la limite inférieure et b est la limite supérieure. La fonction $f(x)$ est la fonction a intégré, et x est la variable d'intégration.

Note historique 7.1

La notation intégrale remonte à la fin du XVIIe siècle et est l'une des contributions de Gottfried Wilhelm Leibniz, qui est souvent considéré comme le découvreur du calcul, avec Isaac Newton. Le symbole d'intégration $\int$ est un S allongé, suggérant un sigma ou une sommation. Sur une intégrale définie, au-dessus et au-dessous du symbole de sommation se trouvent les limites de l'intervalle, $[a,b]$. Les nombres a et b sont des valeurs x et sont appelés les limites de l'intégration, a est la limite inférieure et b est la limite supérieure. Pour clarifier, nous utilisons le mot limite de deux manières différentes dans le contexte de l'intégrale définie.

Remarque 7.1

On dit que la fonction $f(x)$ est intégrable et le dx. indique que $f(x)$ est une fonction par rapport à x, appelée variable d'intégration. Notez que, comme l'indice en somme, la variable d'intégration est une variable fictive, et n'a aucun impact sur le calcul de l'intégrale. Nous pourrions utiliser n'importe quelle variable que nous aimons comme variable d'intégration :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt$$

7.2 Intégrale de Riemann

Définition 7.1

- On appelle partition ou subdivision Δ de l'intervalle $[a,b]$ une suite finie $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

- On appelle pas de la subdivision Δ le nombre réel h défini par

$$h := \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} |x_{i+1} - x_i| := \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} h_i$$

- Lorsque pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, $\quad x_{i+1} - x_i = h$ on dit que la subdivision est uniforme.

Définition 7.2

On pose

$$M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

- On appelle sommes de Darboux de associées à la subdivision Δ, les nombres

$$s_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} m_i h_i \tag{7.1}$$

$$S_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} M_i h_i \tag{7.2}$$

Remarque 7.2

Il convient également de noter ici que nous avons retenu l'utilisation d'une partition uniforme dans les sommes de Riemann. Cette restriction n'est pas strictement nécessaire. N'importe quelle partition peut être utilisée pour former une somme de Riemann. Cependant, si une partition non uniforme est utilisée pour définir l'intégrale définie, il ne suffit pas de prendre la limite car le nombre de sous-intervalles tend à l'infini. Au lieu de cela, nous devons prendre la limite car la largeur du plus grand sous-intervalle va à zéro. Cela introduit une notation un peu plus complexe dans nos limites et rend les calculs plus difficiles sans vraiment gagner beaucoup de perspicacité supplémentaire, donc nous nous en tenons aux partitions uniformes pour les sommes de Riemann

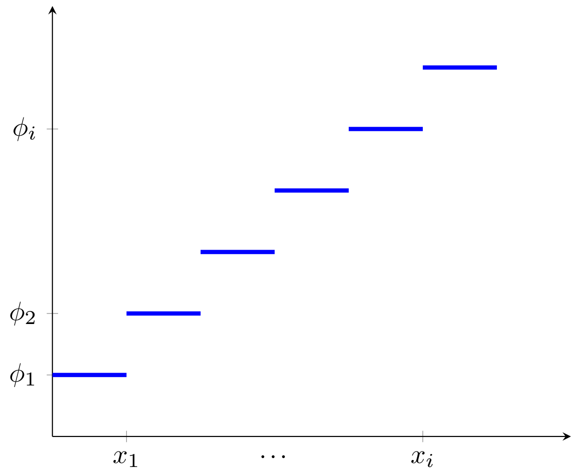

Fig. 7.1 Fonction en escalier

Définition 7.3

Soit ϕ une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. Alors ϕ est dite en escalier sur $[a,b]$, s'il existe une subdivision de $[a,b]$ telle que ϕ soit constante sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$.

Définition 7.4

Soit ϕ une fonction en escalier sur $[a,b]$. On appelle intégrale de ϕ sur $[a,b]$ le réel

$$I(\phi) = \sum_{i=1}^{n} h_i \phi_i$$

On le note $\int_a^b \phi(x)\ dx$

Définition 7.5

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. Alors f est dite Riemann integrable sur $[a,b]$ si pour tout $\varepsilon >$ il existe deux fonctions ϕ_ε et ψ_ε en escalier sur $[a,b]$ telle que

1. $\phi_\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \psi_\varepsilon$

2. $\int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) < \varepsilon$

Exemple 7.1

$f(x) = \exp(x)$ est Riemann intégrable.

Preuve

Nous montrons ici que la fonction $f(x) = \exp(x)$ est Riemann intégrable sur l'intervalle $[0,1]$, le cas d'un intervalle quelconque $[a,b]$ peut être effectuer de la meme manière.
On consider la subdivision

$$\Delta = \{x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots n\}$$

Pour $n = 4$,

$$I_4 = \frac{1}{4}e^0 + \frac{1}{4}e^{1/4} + \frac{1}{4}e^{2/4} + \frac{1}{4}e^{3/4} + \frac{1}{4}e^{4/4} = \frac{1}{4}e^{1/4}\frac{(e^1 - e^{-\frac{1}{4}})}{e^{1/4} - 1}$$

$$I_n = \frac{1}{n}e^{1/n}\frac{(e^1 - e^{-\frac{1}{n}})}{e^{1/n} - 1} = xe^x\frac{e^1 - e^{-x}}{e^x - 1}, \quad x = 1/n$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{x\to 0}\frac{xe^{x+1} - x}{e^x - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I}$$

On utilise la règle de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1} + xe^{x+1} - 1}{e^x} = e - 1$$

Proposition 7.1

Toute fonction continue sur $I = [a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$, f est continue sur $[a,b]$ fermé et borné, d'après le théorème de Heine f est donc uniformément continue. Soit $\tilde{\varepsilon}$ tel que, $0 < \tilde{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Alors,

$$\exists \delta > 0, \quad \forall (x,x') \in I \times I, \quad |x - x'| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(x')| \leqslant \tilde{\varepsilon}$$

On considère une subdivision Δ de pas $h \leqslant \delta$ et on définit les fonctions

$$\begin{aligned}
&\phi_\varepsilon(x) = f(x_i) - \tilde{\varepsilon} \quad \text{pour tout } x \in [x_i, x_{i+1}] \\
&\psi_\varepsilon(x) = f(x_i) + \tilde{\varepsilon} \quad \text{pour tout } x \in [x_i, x_{i+1}] \\
&\phi_\varepsilon(b) = \psi_\varepsilon(b) = f(b)
\end{aligned}$$

par construction on a

$$\phi_\varepsilon(x) = f(x_i) - \tilde{\varepsilon} \leqslant f(x) \leqslant f(x_i) + \tilde{\varepsilon} = \psi_\varepsilon(x)$$

et par sommation nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x)) &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) + \tilde{\varepsilon} - f(x_i) + \tilde{\varepsilon})h \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2\tilde{\varepsilon} \\
&= 2nh\tilde{\varepsilon} \\
&= 2\tilde{\varepsilon}(b-a) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Exemple 7.2

La fonction de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{7.3}$$

n'est pas Riemann integrable.

Preuve

Supposons que f est intégrable au sens de Riemann, dans ce cas, d'après la définition, pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions ϕ_ε et ψ_ε : en escalier sur $[0,1]$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) < \varepsilon$$

Le fait que ϕ_ε et ψ_ε sont constantes sur chaque sous-intervalle de la subdivision, implique que :

$$\phi_\varepsilon = 0, \quad \psi_\varepsilon = 1$$

donc

$$\int_0^1 (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) = 1$$

Remarque 7.3

Cependant, cette définition était accompagnée d'une hypothèse restrictive. Nous avions besoin de $f(x)$ être continu et non négatif. Malheureusement, les applications ne respectent pas toujours ces restrictions. Dans cette section, nous examinons comment appliquer le concept de l'aire sous la courbe à un ensemble plus large de fonctions en utilisant l'intégrale définie.

Remarque 7.4

Une fonctions discontinue sur $[a,b]$ peut encore être intégrable, selon la nature des discontinuités. Par exemple, les fonctions avec un nombre fini de discontinuités de saut sur un intervalle fermé sont intégrables.

7.2.1 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Proposition 7.2

Soient f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$. On a les propriétés suivantes :

1. Si $f \geqslant 0$ alors
$$\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$$

2. Si $f \geqslant g$ alors
$$\int_a^b f(x)\ dx \geqslant \int_a^b g(x)\ dx$$

3.
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$$

4.
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

5.
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx$$

Proposition 7.3

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a,b]$. On a
$$\int_a^b f(x)\ dx = 0 \iff f = 0$$

Preuve

Il est claire que si $f = 0$, alors $\int_a^b f = 0$. Maintenant, nous montrons que
$$f \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f = 0 \implies f = 0$$
par contraposée : supposons que f continue et $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$
$$f \neq 0 \implies \int_a^b f \neq 0$$
En effet, il exist $\alpha, \beta \in [a,b]$ tel que $f_{|[\alpha,\beta]} > 0$
$$\int_a^b f \geqslant \int_\alpha^\beta f > 0$$

Proposition 7.4

Soient f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$. Le produit $f\,g$ est une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et on a

$$\left(\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2\ dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)$$

Preuve

On considère

$$\begin{aligned} T_\lambda &= \int_a^b ((\lambda f+g)^2 \\ &= \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

on considère T_λ comme polynôme de second degré en λ. Alors le discriminant

$$\varDelta = \left(\int_a^b fg\right)^2 - \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$$

est négatif ou nul, $\varDelta \leqslant 0$ est équivalent à

$$\left(\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2\ dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)$$

7.3 Intégrales indéfinies et primitives

Définition 7.6

Soient f une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et $x \in [a,b]$. L'application

$$F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est appelée **intégrale indéfinie** de f.

7.3.1 Propriétés de l'intégrale indéfinie

Proposition 7.5

L'application F est continue sur $[a,b]$

Preuve

Puisque f est Riemann intégrable donc elle majorée par une fonction en escalier qui est en soit bornée donc f est forcément bornée. Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, alors

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t)|\ dt \leqslant M|x-x_0|$$

Proposition 7.6

Si f est continue en $x_0 \in [a,b]$ alors, $F'(x_0) = f(x_0)$

Preuve

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt}{h}\\ &= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ dt}{h}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt}{h}\\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\ dt\end{aligned}$$

ce qui implique que pour $\varepsilon = h^2$

$$\exists\delta>0,\quad |t-x_0| \leqslant \delta \implies |f(t)-f(x_0)| \leqslant h^2$$

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant h$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = 0$$

Remarque 7.5

Le théorème fondamental du calcul nous a donné une méthode pour évaluer les intégrales sans utiliser les sommes de Riemann. L'inconvénient de cette méthode, cependant, est que nous devons être capables de trouver une primitive, et ce n'est pas toujours facile.

7.3.2 Formule de la moyenne

Définition 7.7

Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Proposition 7.7

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors il exist un réel $c\in]a,b[$ tel que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)$$

Preuve

L'application

$$F : x\in[a,b]\mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$ de dérivée f donc d'après le théorème des accroissements finis

$$\exists c\in]a,b[,\quad F(b)-F(a)=(b-a)f(c)$$

7.3.3 Intégration par parties

Dans cette section, nous examinons une technique, appelée intégration par substitution, pour nous aider à trouver des primitive. Plus précisément, cette méthode nous aide à trouver des anti-dérivés lorsque l'intégrale est le résultat d'une dérivée.

Proposition 7.8

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Exemple 7.3

Calculer

1. $\int_a^b \arctan x\; dx$.
2. $\int_a^b e^x \cos x\; dx$
3. $\int_0^x \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$

7.3.4 Changement de variable

Proposition 7.9

Soient I et J deux intervalles de une application de I dans J dérivable et f une application de J dans $\mathbb{R}$ continue. Si F est une primitive de f sur J

Exemple 7.4

Calculer

1. $\int_a^b \frac{1}{\text{ch } x}\, dx$.
2. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\, dx$
3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$

7.3.5 Intégration des fonctions rationnelles

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + (B-\frac{bA}{2a})\int \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

$\Delta = b^2-4ac$

1. $\Delta > 0$ alors $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2}$

2. $\Delta = 0$

3. $\Delta < 0$,

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{-\Delta}{4a}\left(1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right)$$

changement de variable

$$t = \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$$

Exemple 7.5

Calculer les primitives :

1. $\int \frac{4x}{x^2-3x+2}dx \quad \rightarrow \quad A=4, B=0, a=1, b=-3 \quad \rightarrow \quad F(x) = 8\ln(|x-2|) - 4\ln(|x-1|) + c$

2. $\int \frac{6x+3}{x^2+2x+1}dx \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{3}{x+1} + 6\ln|x+1| + c$

3. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx \quad F(x) = (1/2)\ln(x^2+x+1) + (1/3)\sqrt{3}\arctan((1/3)(2x+1)\sqrt{3})$

7.4 Exercices (TD)

Exercice 7.1

On considère l'application $f : x \in [0,1] \mapsto x^2$. Soient $\sigma = \{x_i\}_{\{i=0,1\dots n\}}$ une subdivision uniforme de l'intervalle $[0,1]$ et ϕ_n, ψ_n les fonctions en escalier sur $[0,1]$ définies par :

$$\phi_n(x) = f(x_i) \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad i \in \{0,\dots,n-1\}$$
$$\psi_n(x) = f(x_{i+1}) \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad i \in \{0,\dots,n-1\}$$

1. Représenter graphiquement les fonctions f, ϕ_n et ψ_n pour $n = 10$.

2. Calculer
$$I_n = \int_0^1 \phi_n(x)\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \psi_n(x)\, dx$$

3. en déduire que f est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et donner la valeur de l'intégrale de Riemann $\int_0^1 f(x)\, dx$

Exercice 7.2

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule de l'intégration par parties

1. $\int_a^b \arctan x\, dx.$ $\qquad uv' = \arctan x \times 1$

2. $\int_a^b e^x \cos x\, dx$ $\qquad uv' = e^x \cos x$

3. $\int_0^x \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$

Exercice 7.3

Calculer en utilisant le changement de variable

1. $\int_0^1 \dfrac{1}{\text{ch}x}\, dx \qquad t = e^x.$

2. $\int_e^{e^2} \dfrac{1}{x \ln x}\, dx \qquad x = e^t.$

3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \qquad x = \sin t.$

Exercice 7.4

Calculer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable proposé.

1. $\int \tan x\, dx$ $\qquad$ avec $x \mapsto \cos x$

2. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ $\qquad$ avec $x \mapsto \arcsin x$

Exercice 7.5

Calculer les primitives :

i) $\int \dfrac{4x}{x^2-3x+2}dx$

ii) $\int \dfrac{6x+3}{x^2+2x+1}dx$

iii) $\int \dfrac{2x+1}{x^2+4x+6}dx.$

7.5 Exercices supplémentaires

Exercice 7.6

Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^3 f(t)dt$.

2. Soit $x \in [0,3]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,3]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,3]$?

Exercice 7.7

Donner des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 + x + 3$ sur $\mathbb{R}$

2. $g(x) = 4x^3 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$

3. $h(t) = \dfrac{3}{t^2} - \dfrac{5}{2t^4}$ sur $]0; +\infty[$

4. $i(t) = \dfrac{t^3 + 4t^2 - 2}{t^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 7.8

Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ , \ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ et $\int_0^x h(t)dt$.

Exercice 7.9

En utilisant le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$, calculer les intégrales suivantes :

1.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)}\, dx,$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\, dx$$

Exercice 7.10

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad (t = x^2)$$
$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^3}\,\mathrm{d}x, \qquad (t = x^3)$$
$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x, \qquad (t = e^x)$$
$$\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad (t = \sqrt{x})$$

Exercice 7.11

Calculer les intégales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **b)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arccos x)^2 dx$ **e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ **f)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

g) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x dx$ **h)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}dx$ **i)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$

Exercice 7.12

Soit $a > 0$, montrer que :

$$\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$$

Exercice 7.13

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. Démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx = 0$$

Exercice 7.14: (COVID-19)

Dans cet exercice, on cherche à calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 x^{19}e^{x-1}\,dx$ à l'aide d'une relation de récurrence. Pour $n\in\mathbb{N}$ on considère

$$I_{n+1}=\int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx$$

1. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_{n+1}=1-nI_n \tag{7.4}$$

2. Calculer I_{20} en utilisant la relation (7.4). (On peut écrire un code python par exemple !)
- Un calcul approché de I_1 conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 e^{x-1}\,dx \approx 0.632121\ldots\\
I_2 &\approx 1-I_1=0.367879,\\
I_3 &\approx 1-2I_2=0.264242,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10} &\approx -0.068480,\\
&\vdots\\
I_{19} &\approx 2824544442.3694563
\end{aligned}$$

3. Comparer le résultat obtenu avec le résultat "exacte" $I_{20}=0.0477227557962091$

4. Comment peut-on utiliser la relation (7.4) et nous obtenons un résultat raisonnable ?

Exercice 7.15

Soit $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$

1. Quel est l'ensemble de définition de F. F est-elle continue, dérivable sur son ensemble de définition ?

2. Déterminer $\lim_{x\to 1^+}F(x)$ en comparant F à $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt$.

Exercice 7.16

Soit $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

2. Calculer I_n+I_{n+1}.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

Exercice 7.17

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\displaystyle\int \arctan x dx$ **b)** $\displaystyle\int \tan^2 x dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

e) $\displaystyle\int \arcsin x dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$ **g)** $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp x}}dx$ **j)** $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$ **k)** $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx$ **l)** $\displaystyle\int \cos x \exp x dx$

Exercice 7.18

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.

2. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et expliciter I_n, en déduire $\int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n dx$.

3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$

4. A l'aide de $(n+1) I_n I_{n+1}$ montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

5. En déduire $\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

Exercice 7.19

Soit y une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x (x-t)y(t)\ dt$$

1. Calculer $F'(x)$

2. Montrer que si y vérifie l'équation intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) + \int_0^x (x-t)y(t)\ dt = 1 \tag{7.5}$$

alors, elle vérifie l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0 \tag{7.6}$$

Chapitre 8

Équations différentielles

8.1 Introduction

L'analyse est la mathématique de variation, et les taux de changement sont exprimés par des dérivées. L'une des façons les plus courantes d'utiliser l'analyse mathématique est de configurer une équation contenant une fonction inconnue et sa dérivée, connue sous le nom d'équation différentielle. La résolution de telles équations fournit souvent des informations sur la façon dont les quantités changent et donne souvent un aperçu de la façon dont et pourquoi les changements se produisent.
Les techniques de résolution d'équations différentielles peuvent prendre de nombreuses formes différentes, y compris la solution directe, l'utilisation de graphiques ou des calculs informatiques. Nous présentons les principales idées de ce chapitre et les décrivons un peu plus en détail plus tard dans le cours. Dans cette section, nous étudions ce que sont les équations différentielles, comment vérifier leurs solutions, certaines méthodes qui sont utilisées pour les résoudre et quelques exemples d'équations communes et utiles.

8.2 Généralités

Considérons l'équation :

$$y' = 3x^2$$

qui est un exemple d'une équation différentielle car elle contient une dérivée. Elle exprime une relation entre les variables x et y où y est une fonction inconnue de x. En outre, le côté gauche de l'équation est la dérivée de y. Par conséquent, nous pouvons interpréter cette équation comme suit : Commençons par une fonction $y = f(x)$ et prendre sa dérivée. La réponse doit être égale à $3x^2$. Donc, on pose la question suivante : Quelle est la fonction f dont la dérivée égal à $3x^2$? Une telle fonction est x^3, donc cette fonction est considérée comme une solution de l' équation différentielle.

Définition 8.1

On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction $y(x)$ et ses dérivées $y', y'', \dots y^{(n)}$

On peut écrire symboliquement une équation différentielle sous la forme :

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

ou bien

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

Définition 8.2

On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction vérifiant cette équation

Tableau 8.1 Exemples

équation	solution
$y' = 2x$	$y = x^2$
$y' + 3y = 6x + 11$	$y = e^{-3x} + 2x + 3$
$y'' - 3y' + 2y = 24e^{-2x}$	$y = 3e^{x} - 4e^{2x} + 2e^{-2x}$

Exemple 8.1

Vérifier que $y = e^{-3x} + 2x + 3$ est une solution de l'équation $y' + 3y = 6x + 11$.

Solution

Pour vérifier, nous calculons, y', nous obtenons, $y' = -3e^{-3x} + 2$, puis nous multiplions y par 3 la somme nous donne $6x + 11$.

Exemple 8.2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{8.1}$$

alors les fonctions

$$y = \sin x, \quad y = 2\cos x, \quad y = 3\sin x - \cos x$$

sont des solutions de (8.1). Plus généralement, toute fonction de la forme

$$C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

est une solution de (8.1).

Remarque 8.1

On Note qu'une solution à une équation différentielle n'est pas nécessairement unique, généralement parce que la dérivée d'une constante est nulle. Par exemple, $y = x^2 + 5$ est également une solution de la première équation différentielle du tableau. Nous reviendrons sur cette idée un peu plus loin dans cette section. Pour l'instant, concentrons-nous sur ce que signifie pour une fonction d'être une solution à une équation différentielle.

Il est commode de définir les caractéristiques des équations différentielles qui facilitent leur discussion et leur classification. La caractéristique la plus fondamentale d'une équation différentielle est son ordre.

Définition 8.3

On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans l'équation.

Exemple 8.3

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

est une équation du premier ordre.

Exemple 8.4

a) $y' - 4y = x^2 - 3x + 4$
b) $y''' - 3xy'' + xy' - 3y = \sin x$
c) $4xy^{(4)} - 6x^2y'' + 12x^4y = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

Quelle est l'ordre de chaque équation ?

Solution

a) La dérivée la plus élevée dans l'équation est 1, donc l'équation est du premier ordre.
b) La dérivée la plus élevée dans l'équation est 3, donc l'équation est du troisième ordre
c) La dérivée la plus élevée dans l'équation est 4, donc l'équation est du quatrième ordre

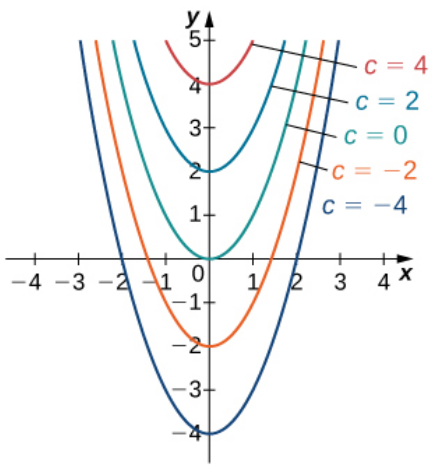

Fig. 8.1 Famille des solutions de l'équation $y' = 2x$

8.3 Équations différentielles du premier ordre

Définition 8.4

On appelle équation différentielle du premier ordre toute équation de la forme

$$F(x, y, y') = 0$$

8.3.1 Équations linéaires du premier ordre

Définition 8.5

On appelle équation linéaire du premier ordre toute équation de la forme :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{8.2}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux fonctions continues de x données.

8.3.2 Résolution des équations linéaires du premier ordre

Nous allons chercher la solution de l'équation (8.2) sous la forme de produit de deux fonctions de x :

$$y = u(x)v(x)$$

Dérivons les deux membres de cette dernière égalité on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Substituant l'expression dans (8.2) nous obtenons :

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q \tag{8.3}$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q \tag{8.4}$$

Choisissons la fonction v de sorte que l'on ait :

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0 \tag{8.5}$$

on trouve

$$\frac{dv}{v} = -Pdx$$

On intégrant

$$\ln|v| - \ln|C_1| = -\int P\ dx \implies v = C_1 e^{-\int P\ dx}$$

Substituant la valeur trouvée de $v(x)$ dans l'équation on obtient

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$

d'où

$$u = \int \frac{Q}{v}\ dx + C$$

Exemple 8.5

On cherche à résoudre l'équation :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

On pose $y = uv$ donc on $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$. Substituant dans l'équation on obtient :

$$u\left(\frac{dv}{dx} + -\frac{2}{x+1}v\right) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

Pour déterminer u et v on résout le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{2}{x+1}v = 0 \\ v\dfrac{du}{dx} \quad\quad = (x+1)^3 \end{cases} \tag{8.6}$$

On obtient $v(x) = (x+1)^2$ et $u(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2} + C$ et donc

$$y(x) = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

8.4 Équation de Bernoulli

Considérons des équations de la forme :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{8.7}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux fonctions continues de x données et $n \neq 0, n \neq 1$ (sinon on aura une équation linéaire).

Cette équation est appelée équation de Bernoulli, se ramène à une équation linéaire par la transformation suivante. Divisons les termes de l'équation par y^n, on obtient :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q \tag{8.8}$$

On pose $z = y^{-n+1}$, alors, on obtient

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

On obtient en substituant dans l'équation (8.7) :

$$\frac{dz}{dx} + \tilde{P}z = \tilde{Q}, \quad \text{avec } \tilde{P} = (-n+1)P, \quad \tilde{Q} = (-n+1)Q$$

Exemple 8.6

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3 \tag{8.9}$$

Divisons cette equation par y^3 on obtient donc :

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3$$

On pose $z = y^{-2}$ alors $\dfrac{dz}{dx} = -2y^{-3}y'$ donc l'équation se transforme à

$$-\frac{1}{2}z' + xz = x^3 \implies z' - 2xz = -2x^3$$

on pose $z = uv$ alors,

$$\begin{cases} v' - 2xv = 0 \\ \qquad u'v = -2x^3 \end{cases} \tag{8.10}$$

alors,

$$v(x) = e^{x^2} \qquad \text{et} \qquad u' = -2x^3e^{-x^2}$$

donc

$$u(x) = \int -2x^3e^{-x^2}\, dx = p_2(x)e^{-x^2} = (ax^2 + bx + c)e^{-x^2}$$

par identification on trouve

$$u(x) = (x^2+1)e^{-x^2} + C \implies z = Ce^{x^2} + x^2 + 1$$

et par conséquent,

$$y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{x^2} + x^2 + 1}}$$

8.4.1 Equation de Riccati

Définition 8.6

On appelle équation de Riccati toute équation différentielle de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)y^2 + d(x) \tag{8.11}$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues de x.
Pour les valeurs de x où le coefficient $a(x)$ ne s'annule pas, nous obtenons après simplification :

$$y' + B(x)y = C(x)y^2 + D(x)$$

Si $D(x) = 0$ nous retrouvons un cas particulier d'équation de Bernoulli.

L'intégration d'une équation différentielle de Riccati nécessite la connaissance d'une solution particulière y_p de cette équation Le changement de fonction inconnue $z = y - y_p$ transforme l'équation différentielle :

$$z' + (B(x) - 2C(x)y_p)z = C(x)z^2$$

de Bernoulli.

Exemple 8.7

Résoudre l'équation différentielle de Riccati

$$x^3y' + x^2y = -y^2 - 2x^4 \qquad (y_p = -x^2)$$

8.4.2 Equations aux différentielles totales

Définition 8.7

On appelle équation aux différentielles totales toute équation de la forme :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

où M et N satisfont la condition

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{8.12}$$

La résolution de l'équation aux différentielles totales consiste à trouver une fonction $u(x,y)$ qui satisfait

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

autrement dit,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \tag{8.13}$$

De la relation (8.13), on obtient

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)$$

et on

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

mais comme,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{8.14}$$

on obtient

$$\varphi'(y) = N(x_0,y)$$

et donc

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C$$

et finalement,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C$$

Exemple 8.8

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^3 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

8.5 Équations différentielles du second ordre

Définition 8.8

Une équation différentielle de la forme :

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

où a_1, a_2, a_0 sont des fonctions ou des constantes et $a_0 \neq 0$ est appelée équation différentielle linéaire homogène si $f(x) = 0$.
Lorsque $f(x) \neq 0$ l'équation est dite non homogène.

Théorèm 8.1

Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation du second ordre homogène

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{8.15}$$

Alors, $y_1 + y_2$ est aussi une solution de (8.15).

Théorèm 8.2

Si y_1 est une solution particulières de l'équation du second ordre homogène

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{8.16}$$

Alors, Cy_1 est aussi une solution de cette équation.

Définition 8.9

Deux solutions y_1 et y_2 sont dites linéairement indépendantes si

$$\frac{y_1}{y_2} \neq Cte$$

Sinon les solutions sont dites linéairement dépendantes

Exemple 8.9

$$y'' - y = 0 \qquad e^{-x}, \quad e^{x}$$

Définition 8.10

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (8.15) le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

est appelé le déterminant de Worenski ou le Worenskien.

Théorèm 8.3

Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement dépendantes alors le Worenskien est nul.

Théorèm 8.4

Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (8.15) alors $C_1y_1+C_2y_2$ est solution de (8.15) où C_1 et C_2 deux constantes arbitraires.

8.5.1 Différentes formes de la solution particulière

Soit l'équation linéaire homogène du second ordre

$$y''+py'+qy=0 \tag{8.17}$$

où p et q sont des constantes réelles. Pour trouver la solution générale de (8.17) il suffit de résoudre l'équation caractéristique :

$$k^2+pk+q=0 \tag{8.18}$$

L'équation caractéristique (8.18) a comme racines :

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ et } k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Alors les trois cas suivants peuvent se présenter :

1. k_1 et k_2 deux réels distincts ($k_1\neq k_2$). Alors les solutions particulières de (8.17) sont

$$y_1=e^{k_1x} \quad \text{et} \quad y_2=e^{k_2x} \Longrightarrow y_g=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}, \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont deux constantes arbitraires}$$

2. k_1 et k_2 deux nombres complexes ($k_1=\alpha+i\ \beta$ et $k_2=\alpha-i\ \beta$). Alors les solutions particulières de (8.17) sont

$$y_1=e^{\alpha x}\cos(\beta x)+ie^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \text{et} \quad y_2=e^{\alpha x}\cos(\beta x)-ie^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

On note que dans ce cas on peut également considérer

$$y_1=e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{et} \quad y_2=e^{\alpha x}\sin(\beta x) \Longrightarrow y_g=e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x))$$

3. $k_1=k_2$ (i.e l'équation (8.18) admet une racine double). Alors les solutions particulières de (8.17) sont

$$y_1=e^{k_1x} \quad \text{et} \quad y_2=xe^{k_1x} \Longrightarrow y_g=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x},$$

8.5.2 Solution particulière pour des équations non homogènes

Soit maintenant l'équation linéaire non homogène du second ordre

$$y''+py'+qy=e^{\alpha x}, \quad \alpha\in\mathbb{C} \tag{8.19}$$

La solution de l'équation (8.19) s'écrit :

$$y=y_g+y_p$$

où y_g est la solution général de l'équation homogène et y_p est la solution particulière. Alors les trois cas suivants peuvent se présenter :

1. α n'est pas une racine de l'équation (8.18) (i.e $\alpha^2+p\alpha+q\neq 0$). Alors la solution particulière de (8.19) prend la forme :

$$y_p=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+p\alpha+q}$$

2. α est une racine simple de l'équation (8.18) (i.e $\alpha^2+p\alpha+q=0$ et $2\alpha+p\neq 0$). Alors la solution particulière de (8.19) prend la forme :

$$y_p=\frac{xe^{\alpha x}}{2\alpha+p}$$

3. α est une racine double de l'équation (8.18) (i.e $\alpha^2+p\alpha+q=0$ et $2\alpha+p=0$). Alors la solution particulière de (8.19) prend la forme :

$$y_p = \frac{x^2 e^{\alpha x}}{2}$$

8.6 Méthode de la variation des constantes

Soit l'équation différentielle linéaire non homogène suivante :

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \tag{8.20}$$

la solution générale de l'équation (8.20) s'écrit sous la forme :

$$y = y_g + y_p \tag{8.21}$$

Si on connait un système fondamentale de solutions $y_1, y_2, ..., y_n$ de l'équation homogène correspondante à (8.20), alors la solution générale de l'équation non homogène (8.20) peut être cherchée sous la forme :

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n, \tag{8.22}$$

où les coefficients $C_i(x), i = 1, \cdots, n$ sont définies par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{8.23}$$

Cas n=2

si y_1 et y_1 sont deux solutions formant une base des solutions de l'équation homogène, on cherchera une solution particulière y vérifiant

$$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \tag{8.24}$$
$$y'(x) = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' \tag{8.25}$$

Les calculs amènent alors au système linéaire en $C_1(x)$ et $C_2(x)$ suivant :

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \tag{8.26}$$

Exemple 8.10

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy'' + y' = x^2$$

On résout l'équation homogène

$$xy'' + y' = 0$$

on trouve que

$$y = C_1 \ln x + C_2$$

Par conséquent on peut prendre

$$y_1 = \ln x \quad \text{et} \quad y_2 = 1$$

Maintenant on cherche y de la forme

$$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)$$

Alors, $C_1(x)$ et $C_2(x)$ doivent satisfaire

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \tag{8.27}$$

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = x \tag{8.28}$$

par conséquent,

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + A, \qquad C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + B$$

8.7 Exercices (TD)

Exercice 8.1

Résoudre les équations suivantes

1. $y' - \tan(x)y = \cos x$ solution : $y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1)\frac{1}{\cos x}$
2. $y' - \frac{y}{x} = x$ solution : $y = Cx + x^2$
3. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$ solution : $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$

Exercice 8.2

Résoudre les équations suivantes

1. $xyy' = 1 - x^2$ solution : $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$
2. $y - xy' = a(1 + x^2y')$ solution : $y = a + \frac{Cx}{1 + ax}$

Exercice 8.3

Résoudre les équations suivantes à l'aide d'un changement de variables

1. $y' = (x + y)^2$ solution : $\arctan(x + y) = x + C$
2. $y = (8x + 2y + 1)^2$ solution : $8x + 2y + 1 = 2\tan(4x + C)$
3. $y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$ solution : $y^2 = 2Cx + C^2$

Exercice 8.4

Résoudre les équations non linéaires suivantes

1. $xy' - y = y^3$ solution : $x = \frac{Cy}{\sqrt{1 + y^2}}$
2. $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$ solution : $y = x^4(\frac{1}{2}\ln x + C)^2$
3. $xy' + 3y = x^2y^2$ solution : $y = \frac{1}{x^3(\ln x + C)}$
4. $y' = \frac{1}{x}y^2 - (2 + \frac{1}{x})y + x + 2$ observez que : $y_p = x$
5. $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ observez que : $y_p = 1/x$

Exercice 8.5

Résoudre les équations aux différentielles totales suivantes

1. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0$ solution : $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4+C$
2. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$ solution : $u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+y^2+C$
3. $xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ solution : $u(x,y)=x^2+y^2-2\arctan\frac{y}{x}+C$

Exercice 8.6

Résoudre les équations suivantes

1. $y''-5y'+6y=0$
2. $y''-9y=0$
3. $y''-y=0$
4. $y''+4y'+2y=0$
5. $y''+y=x\sin x$
6. $y''-y=2x\sin x$
7. $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$
8. $y''=xe^x+y$
9. $y''+y=\tan x$

Exercice 8.7

Résoudre par la méthode de la variation des constantes les équations suivantes

1. $xy''+y'=x^2$ solution : $y=\frac{x^3}{9}+C_1\ln x+C_2$
2. $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ solution : $y=\frac{1}{x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$
3. $x^2y''+xy'-y=x^2$ solution : $y=\frac{x^2}{3}+C_1x+\frac{C_2}{x}$

Pour résoudre une équation différentielle avec Maple, par exemple

$$y''+y=0$$

il suffit de taper
> dsolve({diff(y(x),x,x)+y(x)=0}, y(x));

8.8 Exercices supplémentaires

Exercice 8.8

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0,\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0,\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).

2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

3. Intégrer $(E1)$ sur $]0,\infty[$.

4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,\infty[$.

Exercice 8.9

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Exercice 8.10

Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x \sin x.$$

Exercice 8.11

Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$$

Exercice 8.12

On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.

4. Soit $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0,\infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

a. On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).

b. En déduire une expression de f.

Exercice 8.13

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.

2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.

3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

Exercice 8.14

Résoudre : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x \cos x \cosh x$.

Exercice 8.15

Déterminer les $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x.$$

Exercice 8.16

En posant $t = \arctan x$, résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2} y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Exercice 8.17

Résoudre par le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$ l'équation différentielle :

$$x''^2(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$

Exercice 8.18

On s'intéresse à l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{8.29}$$

1. Montrer que la fonction y définie par :

$$y(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta) d\theta,$$

est une solution de (8.29).

Chapitre 9

CorrigŽ des exercices

9.1 CorrigŽ type (TD 1)

Exercice 9.1

1. L'ensemble des majorants $EM(A)$

$$EM(A) = \{x \in \mathbb{Q}; \quad x \geqslant 2\}$$

cette ensemble possde pour plus petit ŽlŽment 2 cet ŽlŽment appartient ˆ A donc $\sup A = 2 = \max A$

2. L'ensemble des majorants $EM(B)$

$$EM(B) = \{x \in \mathbb{Q}; \quad x \geqslant 2\}$$

cette ensemble possde pour plus petit ŽlŽment 2 mais cet ŽlŽments n'appartient pas ˆ B donc $\sup B = 2$ mais il n' y'a pas de $\max B$.

Exercice 9.2

$$E = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \quad | \quad x \in \mathbb{R}_+^*, x \leqslant 1 \right\}.$$

$$0 < x \leqslant 1 \iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1$$

donc $\forall y \in E$ $1/2 \leqslant y \leqslant 1$ donc E est bornŽ, mais E n'admet pas un ŽlŽment maximal car si

$$y = 1 \iff \frac{1}{x^2+1} = 1 \iff x = 0 \notin \mathbb{R}^*$$

$b = 1$ est une borne supŽrieure

1. $\forall y \in E \qquad y \leqslant 1$

2. $\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists x_\varepsilon, 0 < x_\varepsilon \leqslant 1$ tq

$$1 = b - \varepsilon < y_\varepsilon \quad y_\varepsilon = \frac{1}{x_\varepsilon^2 + 1}$$

$\forall \varepsilon > 0, \quad x_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$

$$\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon + 1} = \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon} > 1$$

pour la borne infŽrieure, on a

$$\forall y \in E \qquad y \geqslant 1/2$$

et on a pour $x = 1$ $\quad \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$ donc $y = 1/2 = \min A$

Exercice 9.3

1. Pour $n=1$ la propriŽtŽ est vraie car on a $1=2!-1=2-1=1$.
On suppose maintenant que

$$\sum_{i=1}^{n} k!\times k=(n+1)!-1$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k!\times k=\sum_{i=1}^{n} k!\times k+(n+1)!(n+1)$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k!\times k &= (n+1)!-1+(n+1)!(n+1)\\ &= (n+1)!(1+n+1)-1\\ &= (n+2)!-1\end{aligned}$$

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 2\sqrt{n}$$

pour $n=1$ on a $\frac{1}{1}\leqslant 2$ donc la propriŽtŽ est vraie pour $n=1$.
On suppose maintenant que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 2\sqrt{n}$$

Alors on a

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\leqslant 2\sqrt{n}+\frac{1}{n+1}$$

mais on a

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}&\geqslant\sqrt{n}\\ 2\sqrt{n+1}&\geqslant\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\leqslant 2\sqrt{n+1}\leqslant 2(n+1)$$

cela implique que :

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\iff\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geqslant\frac{1}{2(n+1)}$$

puisque on a

$$1=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\quad\text{et}\quad(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=n+1-n=1$$

donc on a dŽmontrŽ que

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geqslant\frac{1}{2(n+1)}\implies 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}\geqslant\frac{1}{(n+1)}$$

Finalement on obtient

$$\frac{1}{n+1}+2\sqrt{n}\leqslant 2\sqrt{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 2\sqrt{n+1}$$

Exercice 9.4

1. a. On a

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^n 1^{n-k} \times 1^k = 2^n$$

b.

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^n (1)^{n-k} \times (-1)^k = 0$$

2.

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^n \left(\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k\right)$$

on utilise le fait que $(x-1)^2 \geqslant 0$ ce qui est Žquivalent ˆ

$$x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \iff 2 \leqslant \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

donc

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \geqslant 2$$

donc

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^{n} C_k^n 2 = 2^{n+1}$$

Exercice 9.5

1. On pose $r = 3+\sqrt{5}$ donc

$$\begin{aligned} r^2 &= 9+6\sqrt{5}+5 \\ &= 14+6\sqrt{5} \\ &= 18+6\sqrt{5}-4 \\ & 6(3+\sqrt{5})-4 \end{aligned}$$

donc

$$r^2-6r+4=0 \tag{9.1}$$

cette dernire Žquation est une Žquation algŽbrique, si $r \in \mathbb{Q}$ alors $r-3 \in \mathbb{Q}$ donc $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ Contradiction !

2. $(3-\sqrt{5}) \in]0,1[$

$$4<5<9 \implies 2<\sqrt{5}<3 \implies -3<-\sqrt{5}<-2 \implies 3-3<3-\sqrt{5}<-2+3$$

donc $(3-\sqrt{5}) \in]0,1[$

3.

$$(3-\sqrt{5})^n+(3+\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n 3^{n-k}\left((\sqrt{5})^k+(-\sqrt{5})^k\right)$$

Si k est impaire donc $(\sqrt{5})^k+(-\sqrt{5})^k=0$ est si k est paire alors $(\sqrt{5})^k+(-\sqrt{5})^k=2\sqrt{5}^k$ donc

$$(3-\sqrt{5})^n+(3+\sqrt{5})^n = 2\sum_{k=0}^{n} C_{2\ell}^n 3^{n-2\ell}5^\ell \in \mathbb{N}$$

4.

$$\begin{aligned} E\left((3+\sqrt{5})^n\right) &= E\left((3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n\right) \\ &= (3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n-1 \end{aligned}$$

9.2 CorrigŽ type (TD 2)

Exercice 9.6

1.

$$z = 2\sin^2\theta + i\sin(2\theta)$$

donc

$$\|z\|^2 = 4\sin^4\theta + \sin^2 2\theta$$

mais on sait que :

$$\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

cela implique que

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &= 4\sin^4\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 4\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= 4\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$0 < \theta < \pi \implies \|z\| = 2\sin\theta$$

$$\pi < \theta < 2\pi \implies \|z\| = -2\sin\theta$$

pour l'argument nous observons que

$$\begin{aligned}z &= 2\sin\theta(\sin\theta + i\cos\theta) \\ &= -2i\sin\theta(-\cos\theta + i\sin\theta) \qquad\qquad = +2i\sin\theta(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= 2e^{i\pi/2}\sin\theta e^{-i\theta}\end{aligned}$$

donc si $0 < \theta < \pi$ alors

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} - \theta + (2k\pi)$$

donc si $\pi \leqslant \theta < 2\pi$ alors

$$\mathrm{Arg}(z) = \frac{3\pi}{2} - \theta + (2k\pi)$$

2. Si $\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}z &= 1 - i\tan(\theta) = 1 - i\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{e^{-i\theta}}{\cos\theta}\end{aligned}$$

donc

$$\|z\| = \frac{1}{|\cos\theta|}, \quad \mathrm{Arg}(z) = -\theta$$

Exercice 9.7

1.

$$z^2+z-(1+3i)=0$$

alors

$$\Delta=5+12i \implies \delta=\pm(3+2i), \qquad (\delta^2=\Delta)$$

Les deux solutions sont :

$$z_1=\frac{-1-(3+2i)}{2}=-2-i$$
$$z_2=\frac{-1+(3+2i)}{2}=1+i$$

2.

$$(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$$

$$\Delta=-2i \implies \delta=\pm(1-i)$$

donc les deux solutions sont :

$$z_1=1-i \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$$

3.

$$z^2-2ze^{i\theta}+1=0 \text{ où } \theta\in[0,2\pi]$$

on peut rŽŽcrire l'Žquation sous la forme :

$$\left(z-e^{i\theta}\right)^2=e^{2i\theta}-1$$

4.

$$z^4=-7-24i$$

on pose $w=z^2$ donc l'Žquation s'Žcrit

$$w^2=-7-24i \implies w=\pm(3-4i)$$

et donc

$$z=\pm(2-i) \qquad \text{ou bien} \qquad z=\pm(1+2i)$$

5.

$$z^6=(1-i)/(\sqrt{3}+i) \tag{*}$$

On Žcrit

$$z=|z|e^{i\theta} \text{ et donc } \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5i\pi}{12}}$$

donc (*) $\implies |z|^6=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $6\theta=-\dfrac{5\pi}{12}$ cela implique que :

$$|z|=\frac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[6]{2}}, \quad \theta=-\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}, \quad k=0,1,2,\ldots,5$$

6.

$$z^4+(3-4i)z^2-12i=0$$

On pose $w=z^2$ l'Žquation devient

$$w^2+(3-4i)w-12i=0 \implies w=4i \quad \text{ou bien} \quad w=-3$$

Ensuite, $w=z^2$ implique que

$$z=\begin{cases}\pm(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)\\ \pm\sqrt{3}i\end{cases} \tag{9.2}$$

Exercice 9.8

1.

$$(z+i)^n + (z-1)^n = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = -1 \Longleftrightarrow w^n = -1, \quad \text{avec } w = \frac{z+i}{z-i}$$

donc

$$w_k = e^{\dfrac{i(2k+1)\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

On utilise la relation entre z et w on obtient :

$$z_k = \frac{i(w_k+1)}{w_k - 1}$$

Exercice 9.9

On a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

donc

$$\cos 5\theta = -10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + \cos^5\theta$$
$$\sin 5\theta = \sin^5\theta - 10\cos^2\sin^3\theta + 5\cos^4\theta\sin\theta$$

cela implique que :

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$
$$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\sin\theta$$

Exercice 9.10

1.

$$\begin{aligned} f(z)=f(z') &\iff z(z'^2-2z'+1)=z'(z^2-2z+1) \\ &\iff z(z'^2+1)=z'(z^2+1) \\ &\iff zz'^2-z'=z'z^2-z \\ &\iff z'(zz'-1)=z(z'z-1) \\ &\iff (z'-z)(zz'-1)=0 \\ &\iff z=z' \text{ ou bien } zz'=1 \end{aligned}$$

donc on peut trouver $z \neq z'$ mais $f(z)=f(z')$, par exemple $z=i$ et $z'=-i$

2.

$$\begin{aligned} f(z)=u &\iff \frac{z}{(z-1)^2}=u \\ &\iff z=u(z^2-2z+1) \\ &\iff uz^2-(2u+1)z+u=0 \qquad (*) \end{aligned}$$

si $u=0$ alors (*) admet une seule solution $z=0$. Si $u \neq 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2u+1)^2-4u^2 \\ &= 4u^2+4u+1-4u^2 \\ &= 1+4u \end{aligned}$$

donc on aura deux solutions z_1 et z_2 par consŽquent, si $u \neq 0$ l'application f n'est pas surjective.

3. Si $|z|=1$ alors

$$f(z)=\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-1)^2}=-\frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \in \mathbb{R}$$

9.3 CorrigŽ type (TD 3)

Exercice 9.11

1. On a

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

donc la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante.

2. On a $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

donc la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement dŽcroissante.

3. Pour dŽmontrer que u_n et v_n sont adjacentes il reste ˆ dŽmontrer que

$$\lim_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0$$

Mais on a

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \implies \lim_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0$$

Exercice 9.12

1. Par l'absurde si $(u_n)_n$ est de Cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad |u_n - u_{n+p}| < \varepsilon$$

Mais on a

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1} n+p\frac{1}{k}\Big| = \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{k} > \frac{p}{n+p} > 0$$

donc

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \text{tel que} \quad |u_n - u_{n+p}| > \varepsilon_0$$

cela signifie que la suite $(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy donc n'est pas convergente.

2. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1}$ donc

$$\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$$

donc **Attention !** le fait que $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$ ne suffira pas dire que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Exercice 9.13

1. Nous dŽmontrons d'abord que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ (par rŽcurrence).
Pour $n = 1$ on a $0 \leqslant u_1 = \frac{2}{5} \leqslant 2$. On suppose maintenant que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ alors

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 2 &\implies u_n + 5 \leqslant 7 \\ &\implies \frac{1}{u_n+5} \geqslant \frac{1}{7} \\ &\implies -\frac{1}{u_n+5} \leqslant -\frac{1}{7} \\ &\implies -\frac{28}{u_n+5} \leqslant -4 \end{aligned}$$

Mais on a

$$u_{n+1} = \frac{6(u_n+5)-28}{u_n+5} = 6 - \frac{28}{u_n+5}$$

donc on trouve que

$$u_{n+1} \leqslant 2$$

2. La suite $(u_n)_n$ est croissante ?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6u_n + 2 - u_n^2 - 5u_n}{u_n+5} = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n+5}$$

Nous observons que l'Žquation algŽbrique

$$-x^2 + x + 2 = 0 \iff x = 2 \text{ ou bien } x = -1$$

donc pour $x \in [-1, 2]$ alors $-x^2 + x + 2 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

3. La suite $(u_n)_n$ est croissante est bornŽ donc convergente. Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. Alors $-\ell^2 + \ell + 2 = 0$ et $\ell > 0$ donc $\ell = 2$.
Pour Maple :
rsolve($\{u(n) \times (u(n-1)+5) = 6 \times u(n-1) + 2, u(0) = 0\}, \{u(n)\}$)

on trouve que $u_n = -2\dfrac{4^n - 7^n}{2 \times 4^n + 7^n}$ et $u_{20} \approx 2$

Exercice 9.14

1.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n}), \qquad u_0 = p$$

Il est claire que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $u_n \geqslant \sqrt{\alpha}$ est-ce-que ceci implique que $u_{n+1} \geqslant \sqrt{\alpha}$?

On a

$$u_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{u_n^2 + \alpha - 2\sqrt{\alpha}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{\alpha})^2}{2u_n} \geqslant 0$$

donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{\alpha}$

2.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + \alpha - 2u_n}{2u_n} = \frac{(\sqrt{\alpha} - u_n)(\sqrt{\alpha} + u_n)}{2u_n} \leqslant 0$$

donc $(u_n)_n$ est dŽcroissante et minorŽe par $\sqrt{\alpha}$ donc elle est convergente. Soit ℓ sa limite donc

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{\alpha}{\ell}) \implies \ell = \frac{\ell^2 + \alpha}{2\ell} \implies \ell^2 + \alpha = 2\ell^2 \implies \alpha - \ell^2 = 0 \implies \ell = \pm\sqrt{\alpha}$$

mais puisque $u_n > 0$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{\alpha}$

3. Supposons que $u_n - \alpha \leqslant \dfrac{1}{(2\sqrt{\alpha})^{2^n - 1}}$

$$u_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n}) - \sqrt{\alpha} = \frac{(u_n - \sqrt{\alpha})^2}{2u_n}$$

Mais

$$u_n \geqslant \sqrt{\alpha} \implies \frac{1}{2u_n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

donc

$$u_{n+1} - \sqrt{\alpha} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{\alpha})^2}{2\sqrt{\alpha}} \leqslant \frac{(2\sqrt{\alpha})^{1-2^n}}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{(2\sqrt{\alpha})^{2^n}} \leqslant \frac{1}{(2\sqrt{\alpha})^{2^{(n+1)}-1}}$$

9.4 CorrigŽ type (TD 4)

Exercice 9.15

1. Pour dŽmontrer que f est une fonction paire il faut dŽmontrer que $f(-x)=f(x)$. En effet,

$$\begin{aligned}
f(-x) &= |2(E(-x)+x)+1| \\
&= |2E(-x)+2x+1| \\
&= |2(-1-E(x))+2x+1| \\
&= |-2-2E(x)+2x+1| \\
&= |-1+2(x-E(x))| \\
&= |2(E(x)-x)+1| = f(x)
\end{aligned}$$

2. Montrer que $f(x+1)=f(x)$. On a

$$\begin{aligned}
f(x+1)=2(E(x+1)-(x+1))+1 &= 2E(x)+2-2x-2+1 \\
&= 2E(x)-2x+1 \\
&= 2(E(x)-x)+1 = f(x)
\end{aligned}$$

3. f est-elle continue ? Puisque la fonction est constante sur chaque intervalle $]n,n+1[$, et elle pŽriodique de pŽriode 1, il suffit d'Žtudier la continuitŽ en "0"

$$\lim_{x\to 0^+}(f(x)) = |-1| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-}(f(x)) = |1| = 1$$

Exercice 9.16

1. Pour $x \to 0^+$

$$-1 \leqslant \cos\frac{1}{x} \leqslant 1 \implies -x \leqslant x\cos\frac{1}{x} \leqslant x \implies \lim_{x\to 0^+} x\cos\frac{1}{x} = 0 \quad \text{(encadrement)}$$

Pour $x \to 0^-$

$$-1 \leqslant \cos\frac{1}{x} \leqslant 1 \implies -x \geqslant x\cos\frac{1}{x} \geqslant x \implies \lim_{x\to 0^-} x\cos\frac{1}{x} = 0 \quad \text{(encadrement)}$$

2. On peut utiliser le même raisonnement pour la fonction $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x>0 \\ -\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x<0 \end{cases} \tag{9.3}$$

donc

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = -1$$

Exercice 9.17

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ par densitŽ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\exists x_n \in \mathbb{Q} : \quad \text{tel que } x_n \to x_0$$

alors

$$f(x_0) = x_0^2 \quad \text{mais } f(x_n) = x_n^2 + 1$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x_0^2 + 1 \neq f(x_0)$$

donc f n'est pas continue en aucun point.

Exercice 9.18

1. il suffit d'Žtudier la continuitŽ en "0"

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{9.4}$$

par le thŽorme d'encadrement la fonction est $\tilde{f}$ est continue en "0".

Exercice 9.19

f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Si} f(x) < 0, \forall x \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant 0$$

Puisque on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\exists b$ tel que $f(b) > 0$

$$\text{Si} f(x) > 0, \forall x \implies \lim_{x\to-\infty} f(x) \geqslant 0$$

Puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $\exists a$ tel que $f(a) < 0$.
Par consŽquent,

$$\exists a, b \quad \text{tel que} \quad f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \text{ tel que } f(c) = 0$$

Exercice 9.20

1. $f(x) = x^2$ sur $[-1,1]$ on a

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \leqslant 2|x-y|$$

donc $\exists K = 2$ tel que :

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$$

f est lipscitzienne donc uniformŽment continue

2. $f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0,1]$. D'aprs le thŽorme de Heine, il suffit de prouver que f est continue sur l'intervalle compacte I pour qu'elle soit uniformŽment continue sur I. En effet, si

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leqslant \varepsilon, \qquad x, x_0 \in [0,1]$$

alors,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}||\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| \leqslant 2\varepsilon \implies |x - x_0| \leqslant 2\varepsilon$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{tel que } |x - x_0| \leqslant \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leqslant \varepsilon$$

donc $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformŽment continue sur $[0,1]$ mais n'est pas lipscitzienne car $f'(x)$ n'est pas bornŽ sur $[0,1]$.

3. $f(x) = |x|$ est lipscitzienne car,

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y| \qquad K = 1$$

4. La fonction heaviside $H(x)$ n'est pas continue en 0, car $H(0+) \neq H(0-)$.

5.

$$f : x \in [-1,1] \to f(x) = \begin{cases} x^{3/2}\sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{9.5}$$

f est continue sur $[-1,1]$ et $[-1,1]$ est fermŽ et bornŽ donc f est uniformŽment continue sur $[-1,1]$ mais f n'est pas lipschitzienne en effet, f' n'est pas bornŽe.

9.5 CorrigŽ type (TD 5)

Exercice 9.21

On a

$$\begin{aligned}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h} &= \frac{3\left(f(x+3h)-f(x)+f(x)-f(x-h)\right)}{3h} \\ &= 3\left[\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\right]+\left[\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right]\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h} = 3f'(x)+f'(x) = 4f'(x)$$

Exercice 9.22

Par substitution directe on trouve que :

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{0}{0} \qquad \text{F.I}$$

On utilise la rgle de L'Hôpital :

$$f(x) = e^{x^2+x}-e^{2x} \implies f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x}-2e^{2x}$$

et

$$g(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) \implies g'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)$$

donc

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-2e^2}{\pi}$$

Exercice 9.23

On a

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\sin^{(5)}(\xi), \qquad \xi\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

on a $\sin^{(5)}(\xi) = \sin(\xi)$ et puisque $\xi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $\dfrac{x^5}{120}\sin\xi > 0$. Donc en dŽduit que

$$\sin x \geqslant x-\frac{x^3}{6}$$

de l'autre cotŽ on a $\sin\xi \leqslant 1$ donc

$$\frac{x^5}{120}\sin\xi \leqslant \frac{x^5}{120}$$

donc on trouve :

$$\sin x \leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

Exercice 9.24

On a

$$f(x)=\frac{1+x^n}{(1+x)^n},\quad x\geqslant 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{nx^n}{x(1+x)^{n+1}}-\frac{(1+x^n)n}{(1+x)^{n+1}}\\&=\frac{n(1+x)x^n-x(1+x^n n)}{x(1+x)^{n+1}}\end{aligned}$$

donc

$$n(1+x)x^n-x(1+x^n n)=0 \implies (1+x)x^n=x(1+x^n) \implies x^{n-1}=1 \implies (x=0)\text{ou bien}(x=1)$$

pour $0<x<1 \implies f'(x)<0$ et pour $1<x<\infty \implies f'(x)>0$. Par consŽquent

$$\min_{x\in[0,1]} f(x)=f(1)$$

Maple :

$$plot\left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2},x=0..20\right);$$

Exercice 9.25

Pour dŽmontrer que la fonction ln est concave il suffit dŽmontrer que

$$(\ln(x))''<0 \quad \text{pour } x>0$$

En effet,

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \implies (\ln x)''=-\frac{1}{x^2}<0$$

donc la fonction ln est concave, i.e., $\forall\lambda\in[0,1]$ on a

$$\ln(\lambda a+(1-\lambda)b)\geqslant \lambda\ln a+(1-\lambda)\ln b$$

on pose

$$\lambda=\frac{1}{p} \implies 1-\lambda=\frac{1}{q}$$

on utilise le fait que la fonction exponentielle est croissante on trouve

$$e^{\ln(\lambda a+(1-\lambda)b)}\geqslant e^{\lambda\ln a+(1-\lambda)\ln b}$$

Finalement, on dŽduit que :

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

9.6 CorrigŽ type (TD 6)

Exercice 9.26

1. Il suffit dŽmontrer que f est continue et strictement monotone sur $]0,\pi/2[$. En effet, la fonction sin est continue sur $]0,\pi/2[$ et elle ne s'annule pas sur cet intervalle donc la fonction $1/\sin(x)$ est continue. Pour la monotonie on a

$$\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)' = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} < 0, \quad \forall x \in]0,\pi/2[$$

donc la fonction est strictement dŽcroissante.
Maintenant calculons l'image de l'intervalle $]0,\pi/2[$ par f on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pi/2} f(x) = 1$$

$$\forall y \in]1,\infty[, \frac{1}{\sin(x)} = y \iff \sin(x) = \frac{1}{y} \iff x = \arcsin(1/y)$$

donc

$$f(]0,\pi/2[) =]1,+\infty[.$$

2.

$$y = f(x) \iff y = 1/\sin(x)$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)}\\ &= -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\\ &= -\frac{\frac{1}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}\\ &= -\frac{1}{y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}\\ &= \frac{-1}{y\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

Exercice 9.27

RŽsoudre les Žquations suivantes :

1. $x^2-1-\ln(2x-1)+\ln 2=0$. donc

$$\frac{(x^2-1)}{2x-1}=1/2 \iff 2x^2-2x-1=0 \iff x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

2. $\ln(x+2)+\ln(x-4)-2\ln(x+1)=0$.

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+1)^2}=1 \iff x_0=-\frac{9}{4}$$

3. $e^{2x}-e^x-6=0$. On pose $z=e^x$ on trouve donc

$$z^2-z-6=0 \iff z=3 \quad z=-2(\text{rŽfusŽ})$$

$$e^x=3 \iff x=\ln 3$$

Exercice 9.28

La fonction co-tangente hyperbolique $f(x)=\coth(x)=\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ admet une dŽrivŽe

$$f'(x)=\frac{\operatorname{th}^2(x)-1}{\operatorname{th}^2(x)}<0$$

qu'elle est strictement nŽgative donc la fonction est strictement dŽcroissante, elle rŽalise une bijection de

$$\mathbb{R}^* \mapsto]-\infty-1[\cup]1,\infty[.$$

La bijection rŽciproque de la fonction cotangente hyperbolique est continue et strictement dŽcroissante sur $]-\infty,-1[$ dans $]1,\infty[$ de est appelŽe la fonction argument co-tangente hyperbolique et on la note argcoth (voir la figure fig.1).

Exercice 9.29

On considre la fonction

$$g(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

La fonction arcsin Žtant dŽfinie sur $[-1,1]$, la quantitŽ $f(x)$ est dŽfinie pour $g(x)\in[-1,1]$. Donc

$$\begin{aligned} 1\leqslant \frac{2x}{1+x^2}\leqslant 1 \iff & \left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1 \\ \iff & 2|x|\leqslant 1+x^2 \\ \iff & x^2-2|x|+1\geqslant 0 \\ & (|x|-1)^2\geqslant 0 \end{aligned}$$

On en dŽduit donc que f est dŽfinie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est composŽe de de l'application arcsin qui est continue sur $[-1,1]$ et la fonction g qui est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue.
Calcul de la dŽrivŽe.

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}\frac{1-x^2}{|1-x^2|}.$$

Pour la reprŽsentation graphique voir figure 2.

9.7 CorrigŽ type (TD 7)

Exercice 9.30

1. On a

$$I_n = \int_0^1 \phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i) = h\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

de meme on a

$$J_n = \int_0^1 \phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_{i+1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i+1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

2. Pour montrer que f est Riemann intŽgrable, considŽrons les rŽels

$$I_-(f) = \sup\left\{\int_0^1 \phi | \quad \phi \in \mathcal{E}_{[0,1]}, \quad \phi \leqslant f\right\}$$

$$I_+(f) = \sup\left\{\int_0^1 \psi | \quad \psi \in \mathcal{E}_{[0,1]}, \quad \psi \geqslant f\right\}$$

où $\mathcal{E}_{[0,1]}$ est l'ensemble des fonctions en escalier sur l'intervalle $[0,1]$.
Par dŽfinition de la borne infŽrieure, on a $I_- \leqslant J_n$ et par dŽfinition de la borne supŽrieure, on a $I_+ \geqslant I_n$. Par ailleurs, on a $I_+(f) \leqslant I_-(f)$ car pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{E}$

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \implies \int_0^1 \phi \leqslant \int_0^1 \psi$$

On en dŽduit que pour tout n non nul,

$$I_n \leqslant I_+(f) \leqslant I_-(f) \leqslant J_n$$

Or, on a clairement,

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n = \frac{1}{3}$$

D'aprs le thŽorme d'encadrement, on en dŽduit que

$$I_+(f) = I_-(f) = \frac{1}{3}$$

Cela implique, que f est Riemann-intŽgrable sur $[0,1]$ et que

$$\int_0^1 f = \frac{1}{3}$$

Exercice 9.31

1.

$$\int_a^b \arctan x \; dx = [x \arctan x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x^2+1} \; dx = [x \arctan x]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{2x}{x^2+1} \; dx$$
$$= [x \arctan x]_a^b - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$I = \int_a^b e^x \cos x \; dx = [e^x \sin x] - \int_a^b e^x \sin x \; dx = [e^x \sin x]_a^b - [e^x \sin x]_a^b - \int_a^b e^x \cos x \; dx$$

Donc

$$2I = [e^x \sin x]_a^b - [e^x \sin x]_a^b$$

2. Pour calculer

$$J_n = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

on applique la formule d'intŽgration par parties en prenant

$$u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n} \quad \text{et} \quad v'(t) = 1$$

alors on obtient

$$J_n(x) = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

puis observez que $t^2 = (1+t^2)-1$, on obtient

$$J_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - 2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nJ_n(x) - 2nJ_{n+1}(x)$$

donc

$$J_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n(x)$$

Cette dernire expression permet de calculer $J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par rŽcurrence ˆ partir de l'expression de

$$J_1(x) = \arctan x$$

Exercice 9.32

Calculer en utilisant le changement de variable

1. $\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}x}\ dx \qquad t = e^x$. alors

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}x}\ dx = 2\arctan(e^t)$$

2. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\ dx \qquad x = e^t$. Alors

$$\int \frac{1}{x\ln x}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx$$

3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \qquad x = \sin t$. alors

$$\int \sqrt{1-x^2} = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\ dt$$

Exercice 9.33

Calculer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable proposŽ.

1. $\int \tan x\ dx \qquad$ avec $x \mapsto \cos x$ alors

$$\begin{aligned} t = \cos x \implies dt = -\sin x\ dx \implies \int \tan x\ dx &= \int \frac{\sin x}{t} \frac{dt}{-\sin x} \\ &= -\int \frac{1}{t}\ dt = -\ln t = -\ln\cos x \end{aligned}$$

2. $\int \sqrt{1-x^2}\ dx \qquad$ avec $x \mapsto \arcsin x$.
Alors,

$$t = \arcsin x \implies \sin t = x \quad \text{and} \quad dt = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\begin{aligned} \implies \int \sqrt{1-x^2}\ dx &= -\int (1-x^2)dt \\ &= -\int \cos^2 t\ dt \\ &= \int \frac{\sin 2t - 1}{2}\ dt \end{aligned}$$

Exercice 9.34

Calculer les primitives :

1.

$$\int \frac{4x}{x^2-3x+2}dx = 2\int \frac{2x}{x^2-3x+2}dx = 2\ln|x^2-3x+2|+C$$

2.

$$\int \frac{6x+3}{x^2+2x+1}dx = 3\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1}dx - \int \frac{3}{x^2+2x+1}dx$$

3.

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+6}dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx - \int \frac{3}{x^2+4x+6}dx$$

9.8 CorrigŽ type (TD 8)

1. On pose $y = uv$ alors pour dŽterminer y il suffit de rŽsoudre le systme suivant :

$$\begin{cases} u' - \tan x \ u = 0 \\ \qquad uv' = \cos x \end{cases} \tag{9.6}$$

donc

$$\frac{du}{u} = \tan x \ dx \implies \ln u = -\ln \cos x \implies u(x) = \frac{1}{\cos x}$$

En suite,

$$v' = \frac{\cos x}{u(x)} \implies v'(x) = -\cos^2 x \implies v(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1$$

donc la solution est :

$$y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1)\frac{1}{\cos x}$$

2. $y' - \dfrac{y}{x} = x$, on pose $y = uv$ alors pour dŽterminer y il suffit de rŽsoudre le systme suivant :

$$\begin{cases} u' - \dfrac{1}{x} \ u = 0 \\ \qquad uv' = x \end{cases} \tag{9.7}$$

donc

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \implies u = x$$

ensuite

$$uv' = x \implies v' = 1 \implies v = x + C$$

donc la solution est $y = x^2 + Cx$

3. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$, on pose $y = uv$ alors pour dŽterminer y il suffit de rŽsoudre le systme suivant :

$$\begin{cases} u' + \dfrac{2}{x} \ u = 0 \\ \qquad uv' = x^3 \end{cases} \tag{9.8}$$

donc

$$\frac{du}{u} = -\frac{2}{x}dx \implies u = \frac{1}{x^2}$$

ensuite

$$uv' = x^3 \implies v' = x^5 \implies v = \frac{x^6}{6} + C$$

donc la solution est

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$$

Bibliographie

Littérature

1. Khelifa Zizi. Fonctions d'une variable réelle. OPU (Livre 07) 2010.
2. Stéphane BALAC et Frédéric STURM. Algèbre et analyse. Presse polytechniques et universitaires romandes (2009).
3. N. Piskonov. Calcul différentiel et intégral, Tome 1, Mir, Moscou (1972).
4. B Demidovitch. Recueil d'Exercices et de Problèmes d'Analyse Mathématique. Mir, Moscou (1975).
5. Kada Allab. Éléments d'analyse : fonction d'une variable réelle. Ellipses, 2012