EEP
Deuxième année Master Maths:ANM

2021-2022
Université Kasdi Merbah

Examen .

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

$$\begin{aligned} V :=& H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \quad | \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma\} \\ \Lambda :=& \{\mu \in H^{-1}(\Omega) \quad | \quad \langle \mu, v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad v \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega\} \end{aligned}$$

On introduit $\mathcal{H} = V \times \Lambda$ et la forme bilinéaire $\mathscr{A} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ et la forme linéaire $\mathscr{L} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}((v,\xi);(w,\mu)) &= (\nabla v, \nabla w) - \langle \xi, w\rangle - \langle \mu, v\rangle \\ \mathscr{L}(w,\mu) &= (f,w) - \langle \psi, \mu\rangle \end{aligned}$$

On s'intéresse à l'analyse *a posteriori* de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } (u,\lambda) \in \mathcal{H} \quad \text{tels que} \\ \mathscr{A}((u,\lambda);(w,\ \mu - \lambda)) \leq \mathscr{L}(w, \mu - \lambda), \quad \forall (w,\mu) \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{1}$$

On considère deux espaces de dimension finie V_h, Q_h et l'ensemble Λ_h

$$\begin{aligned} V_h =& \{v_h \in H_0^1(\Omega), \quad v_{h|T} \in \mathbb{P}_2(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ Q_h :=& \{\mu_h \in Q; \quad \mu_{h|T} \in \mathbb{P}_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ \Lambda_h =& \{\mu_h \in Q_h : \mu_h \geq 0 \quad \text{dans } \Omega\}. \end{aligned}$$

Soit $\alpha > 0$, on introduit

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_h((u_h,\lambda_h);(v,\xi)) &= \mathscr{A}((u_h,\lambda_h);(v,\xi)) - \alpha \mathcal{S}_h((u_h,\lambda_h);(v,\xi)) \\ \mathscr{L}_h(v,\xi) &= \mathscr{L}(v,\xi) - \alpha \mathcal{L}_h(v,\xi) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_h((w,\mu);(v,\xi)) :=& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (-\Delta w - \mu, -\Delta v - \xi)_T \\ \mathcal{L}_h(v,\xi) :=& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (f, -\Delta v - \xi)_T \end{aligned}$$

Il est claire que si (u,λ) est la solution du problème continue (1), alors,

$$\mathcal{S}_h((u,\lambda);(v,\xi)) = \mathscr{L}_h(v,\xi), \quad \forall (v,\xi) \in V_h \times \Lambda_h \tag{2}$$

donc le problème (1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{trouver } (u,\lambda) \in V \times \Lambda \quad \text{tels que} \\ \quad \mathscr{A}_h((u,\lambda);(w,\ \mu - \lambda)) \leq \mathscr{L}_h(w, \mu - \lambda), \quad \forall (w,\mu) \in V \times \Lambda \end{cases} \tag{3}$$

On considère le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, \lambda_h) \in V_h \times \Lambda_h \text{ tel que} \\ \mathscr{A}_h((u_h, \lambda_h); (v_h, \mu_h - \lambda_h)) \leq \mathscr{L}_h(v_h, \mu_h - \lambda_h) \quad \forall (v_h, \mu_h) \in V_h \times \Lambda_h \end{cases} \tag{4}$$

nous définissons les indicateurs locaux :

$$\eta_T^2 = h_T^2 \|\Delta u_h + \lambda_h + f\|_{0,T}^2 \quad \text{et} \quad \eta_e^2 = h_e \|\nabla u_h \cdot n\|_{0,e}^2$$

On définit aussi l'indicateur globale

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \eta_e^2$$

et finalement on définit

$$S_m = \|\psi - u_h\|_1 + \sqrt{\langle (\psi - u_h)_+, \lambda_h \rangle}, \text{ où } (\psi - u_h)_+ = \max\{\psi - u_h, 0\}$$

Questions :

1. Montrer qu'il exist une constant positive C_I telle que :

$$C_I \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\Delta v_h\|_{0,T}^2 \leq \|\nabla v_h\|_0^2 \tag{5}$$

2. On suppose que $0 < \alpha < C_I$. Montrer que pour $(v_h, \xi_h) \in V_h \times Q_h$ il existe $w_h \in V_h$ tel que :

$$\mathscr{A}_h((v_h, \xi_h); (w_h, -\xi_h)) \gtrsim (\|v_h\|_1 + \|\xi_h\|_{-1})^2 \tag{6}$$

$$\|w_h\|_1 \lesssim \|v_h\|_1 + \|\xi_h\|_{-1} \tag{7}$$

3. Montrer que

$$(\|u - u_h\|_1 + \|\lambda - \lambda_h\|_{-1})^2 \lesssim \mathscr{L}_h(w - w_h, \lambda_h - \lambda) - \mathscr{A}_h((u_h, \lambda_h); (w - w_h, \lambda_h - \lambda))$$

4. Montrer que

$$\langle u_h - \psi, \lambda_h - \lambda \rangle \leq \|(\psi - u_h)_+\|_1 \|\lambda - \lambda_h\|_{-1} + \langle (\psi - u_h)_+, \lambda_h \rangle$$

5. En déduit l'estimation :

$$\|u - u_h\|_1 + \|\lambda - \lambda_h\|_{-1} \lesssim \eta + S_m \tag{8}$$

Indications :

1. Utiliser l'inégalité inverse.

2. a. Utiliser l'inégalité (5) pour avoir l'inégalité (6), mais pour la norm $\|\cdot\|_{-1,h}$.

b. Ensuite, utiliser le fait que

$$\exists q_h \in V_h \text{ tel que } \quad \frac{\langle q_h, \xi_h \rangle}{\|q_h\|_1} \geq C_1 \|\xi_h\|_{-1} - C_2 \|\xi_h\|_{-1,h} \quad \text{et} \quad \|q_h\|_1 = \|\xi_h\|_{-1} \quad (**)$$

c. Calculer $\mathscr{A}_h((v_h, \xi_h); (q_h, 0))$

d. Calculer $\mathscr{A}_h((v_h, \xi_h); (v_h + \delta q_h, -\xi_h))$ avec un choix convenable de δ.

3. a. Utiliser l'inégalité de stabilité pour le problème continue.

b. Utiliser w_h l'interpolé de Clément de w et calculer $\mathscr{L}_h(-w_h, 0) - \mathscr{A}_h((u_h, \lambda_h); (-w_h, 0))$.

4. Observer que :

$$\langle u_h - \psi, \lambda_h - \lambda \rangle \leq \langle (\psi - u_h)_+, \lambda \rangle - \langle \psi - u_h, \lambda_h \rangle$$

5. Combiner les résultats de la question 3 et 4.