Analyse a posteriori pour une inéquation variationnelle Problème d'obstacle.

1 Préliminaires

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. On introduit :

$$\begin{aligned} V :=& H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \quad | \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ \mathcal{K} :=& \{v \in V; \quad v \geq \psi \text{ p.p dans } \Omega\} \\ Q :=& H^{-1}(\Omega) \end{aligned}$$

On s'intéresse à l'analyse a posteriori de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \geq \int_\Omega f(v-u)dx, \quad \forall v \in \mathcal{K} \end{cases} \tag{1}$$

Nous rappelons que (voir le cours MEF2) :

- ☞ Le théorème de Stampacchia affirme l'existence d'une unique solution u de (1)
- ☞ Si $\partial\Omega$ est suffisamment régulière ($C^{1,1}$), alors $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
- ☞ u satisfait le système de complémentarité :

$$\begin{cases} -\Delta u - f \geq 0, & \text{dans } \Omega \\ u - \psi \geq 0, & \text{dans } \Omega \\ (u-\psi, -\Delta u - f) = 0, & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2}$$

- ☞ Estimation d'erreur *a priori* . Si $u \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{K}$ solution de (1) et $u_h \in \mathcal{K}_h$ (avec $V_h = V_h^1$) solution du problème discret, alors on a :

$$|u-u_h|_{1,\Omega} = \|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Cte\ h\left(|u|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + |\psi|_{H^2(\Omega)}\right) \tag{3}$$

Remarques :

1. L'estimation (3) nécessite la régularité $H^2(\Omega)$.

2. Pratiquement, il est difficile de vérifier $\mathcal{K}_h \subset \mathcal{K}$.

2 Une Formulation variationnelle mixte

On introduit l'ensemble :

$$\Lambda := \{\mu \in Q \quad | \quad \langle \mu, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad v \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega\}$$

Soit $\mathcal{H} = V \times \Lambda$, on définit la forme bilinéaire $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ et la forme linéaire $\mathcal{L} : V \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{A}((v, \xi); (w, \mu)) = (\nabla v, \nabla w) - \langle \xi, w \rangle - \langle \mu, v \rangle$$
$$\mathcal{L}(w, \mu) = (f, w) - \langle \psi, \mu \rangle$$

1. Vérifier que le problème (1) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } (u, \lambda) \in \mathcal{H} \quad \text{tels que} \\ \mathcal{A}((u, \lambda); (w, \ \mu - \lambda)) \leq \mathcal{L}(w, \mu - \lambda), \quad \forall (w, \mu) \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{4}$$

2. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\inf_{\xi \in Q} \sup_{v \in V} \frac{\langle \xi, v \rangle}{\|v\|_V \|\xi\|_Q} \geq \beta \tag{5}$$

3. Montrer que pour tout $(v, \xi) \in \mathcal{H}$ il existe $w \in V$ tel que :

$$\mathcal{A}((v, \xi); (w, -\xi)) \gtrsim (\|v\|_1 + \|\xi\|_{-1})^2 \tag{6}$$
$$\|w\|_1 \lesssim \|v\|_1 + \|\xi\|_{-1} \tag{7}$$

4. On déduit que :

$$\exists \beta > 0, \quad \text{telle que} \quad \sup_{(w,\mu) \in \mathcal{H}} \frac{\mathcal{A}((v, \xi); (w, \mu))}{\|(w, \mu)\|_{\mathcal{H}}} \geq \beta \|(v, \xi)\|_{\mathcal{H}}$$

3 Discrétisation du problème mixte

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de Ω, et $\mathcal{E}_h$ l'ensemble des arrêtes intérieures.
On considère deux espaces de dimension finie V_h et Q_h

$$V_h \subset H_0^1(\Omega) \quad Q_h \subset H^{-1}(\Omega)$$

les fonctions de Q_h sont polynomiales par morceaux. De plus on définit

$$\Lambda_h = \{\mu_h \in Q_h : \mu_h \geq 0 \quad \text{dans } \Omega\} \subset \Lambda$$

et on considère le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, \lambda_h) \in V_h \times \Lambda_h \text{ tel que} \\ \mathcal{A}((u_h, \lambda_h); (v_h, \mu_h - \lambda_h)) \leq \mathcal{L}(v_h, \mu_h - \lambda_h) \quad \forall (v_h, \mu_h) \in V_h \times \Lambda_h \quad \forall \mu_h \in \Lambda_h \end{cases} \tag{8}$$

1. Montrer que si V_h et Q_h sont tels que

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{\langle v_h, \xi_h \rangle}{\|v_h\|_1} \gtrsim \|\xi_h\|_{-1}, \quad \forall \xi_h \in Q_h \tag{9}$$

Alors,

a. Pour tout $(v_h, \xi_h) \in V_h \times \Lambda_h$ il existe $w_h \in V_h$ tel que :

$$\mathcal{A}((v_h, \xi_h); (w_h, -\xi_h)) \gtrsim (\|v_h\|_1 + \|\xi_h\|_{-1})^2 \tag{10}$$

$$\|w_h\|_1 \lesssim \|v_h\|_1 + \|\xi_h\|_{-1} \tag{11}$$

b. On déduit que :

$$\exists \tilde{\beta} > 0, \text{ telle que } \sup_{(w_h, \mu_h) \in V_h \times Q_h} \frac{\mathcal{A}((v_h, \xi_h); (w_h, \mu_h))}{\|(w_h, \mu_h)\|_{V_h \times Q_h}} \geq \tilde{\beta} \|(v_h, \xi_h)\|_{V_h \times Q_h} \tag{12}$$

c. Le problème discret (8) admet une solution unique.

4 Estimation d'erreur a posteriori

Tout d'abord nous définissons les indicateurs locaux :

$$\eta_T^2 = h_T^2 \|\Delta u_h + \lambda_h + f\|_{0,T}^2$$
$$\eta_e^2 = h_e \|[\![\nabla u_h \cdot n]\!]\|_{0,e}^2$$

On définit aussi

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \eta_e^2$$
$$S_m = \|\psi - u_h\|_1 + \sqrt{\langle (\psi - u_h)_+, \lambda_h \rangle}$$

où $w_+ = \max\{w, 0\}$ désigne la partie positive de w.

4.1 Fiabilité de l'indicateur

Dans cette sous-section on cherche à démontrer l'estimation suivante :

$$\boxed{\|u - u_h\|_1 + \|\lambda - \lambda_h\|_{-1} \lesssim \eta + S_m \qquad (***)}$$

1. Montrer qu'il existe $w \in V$ tel que :

$$\mathcal{A}((u - u_h, \lambda - \lambda_h); (w, \lambda_h - \lambda)) \gtrsim (\|u - u_h\|_1 + \|\lambda - \lambda_h\|_{-1})^2 \tag{13}$$

$$\|w\|_1 \lesssim \|u - u_h\|_1 + \|\lambda - \lambda_h\|_{-1} \tag{14}$$

2. Soit w_h l'interpolé de Clément de w. Montrer que

$$0 \leq \mathcal{L}(-w_h, 0) - \mathcal{A}((u_h, \lambda_h); (-w_h, 0)).$$

3. Montrer que

$$(\|u-u_h\|_1+\|\lambda-\lambda_h\|_{-1})^2 \lesssim \mathcal{L}(w-w_h,\lambda_h-\lambda)-\mathcal{A}((u_h,\lambda_h);(w-w_h,\lambda_h-\lambda)) \quad (15)$$

4. Montere que

$$\langle u_h-\psi,\lambda_h-\lambda\rangle \leq \|(\psi-u_h)_+\|_1\|\lambda-\lambda_h\|_{-1}+\langle(\psi-u_h)_+,\lambda_h\rangle \quad (16)$$

5. En déduit l'estimation $(***)$

4.2 Optimalité de l'indicateur

Soit $f_h \in Q_h$ la projection de f par rapport au produit scalaire L_2 et on définit

$$osc_T(f) = h_T\|f-f_T\|_{0,T}$$
$$osc(f)^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2\|f-f_T\|_{0,T}^2$$

1. Montrer que pour tout $v_h \in V_h$ et $\mu_h \in Q_h$ on a :

$$h_T\|\Delta v_h+\mu_h+f\|_{0,T}^2 \lesssim \|u-v_h\|_{1,T}+\|\lambda-\mu_h\|_{-1,T}+osc_T(f) \quad (17)$$
$$h_e^{1/2}\|\nabla v_h\cdot n\|_{0,e} \lesssim \|u-v_h\|_{1,\omega(e)}+\sum_{T\in\omega(e)}(\|\lambda-\mu_h\|_{-1,T}+osc_T(f)) \quad (18)$$

2. On déduit que :

$$\eta_T \lesssim \|u-u_h\|_{1,T}+\|\lambda-\lambda_h\|_{-1,T}+osc_T(f) \quad (19)$$
$$\eta_e \lesssim \|u-u_h\|_{1,\omega(e)}+\sum_{T\in\omega(e)}(\|\lambda-\lambda_h\|_{-1,T}+osc_T(f)) \quad (20)$$
$$\eta \lesssim \|u-u_h\|_1+\|\lambda-\lambda_h\|_{-1}+osc(f) \quad (21)$$