TP1: Le théorème de Weierstrass et le Polynôme de Bernstein

D'après le théorème de Weierstrass toute fonction continue sur un segment s'approxime uniformément par une suite de fonctions de polynômes. Une preuve constructive de ce résultat repose sur les Polynômes de Bernstein

1. Ecrire un procédure bernstein qui prend en entrée, un entier n, une fonction f; elle renvoie l'expression de polynôme de Bernstein :

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_k^n x^k (1-x)^{n-k}$$

   À l'aide de cette procédure on tracera conjointement les graphes des fonctions f et $B_n f$ pour $n = 5, 10$ et 20 avec f donnée par les formules suivantes:

   i) $f_1(x) = |x - 1/2|$

   ii) $f_2(x) = (4x(1-x))^5$

   iii) $f_3(x) = \sin(10x)$

   iv) $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. (a) Calculez explicitement l'expression

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 C_k^n x^k (1-x)^{n-k}$$

   (b) Tirrez de là, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, la majoration

$$\sum_{|x-k/n| \geq \varepsilon} C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

   (c) Pour une fonction lipschitzienne f sur $[0,1]$, prouvez la relation

$$\sup_{x \in [0,1]} |(B_n f)(x) - f(x)| \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right).$$

3. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ x - 1/2 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

   (a) Montrez que $(B_n f)$ est croissante et positive sur [0,1/2], puis que la différence $\Delta_n = B'_n - f$ vérifie la propriété $\Delta_n(x) = \Delta_n(1-x)$ pour x dans $[0,1]$. De là tirez l'égalité valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|(B_n f) - f\|_\infty \equiv \sup_{x \in [0,1]} |(B_n f)(x) - f(x)| = (B_n f)(1/2).$$

   (b) Tracez les graphes de f et de $(B_n f)$ pour $n = 15, 30, 60$. Déterminez empiriquement l'ordre de convergence de $\|B'_n - f\|_\infty$ vers 0 , c'est-à-dire un exposant α satisfaisant, pour un certain C, l'équivalence

$$\|(B_n f) - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{C}{n^\alpha}.$$

4. L'experimentation précédente montre que la convergence est plus rapide que ne le laissait penser le résultat obtenu. On reprend donc la demonstration en introduisant l'entier $\alpha = [|x - k/n|/\varepsilon]$. ($[\cdot]$ désigne la partie entière).
   Montrer que α vérifie l'inégalité

$$\alpha \leq \frac{1}{\varepsilon^2 (x - k/n)^2}$$

   En supposant que f est lipschitzienne, obtenez une majoration de $\|(B_n f) - f\|_\infty$ conforme a l'experience.